Zadanie 1.1. Równanie stanu dla cieczy złożonej z cząstek o niezerowej objętości (gaz nie-idealny) nazywamy równaniem van der Waals. Ma ono postać:

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$

gdzie:

a, b – stałe charakteryzujące dany gaz

T – temperatura

V – objętość gazu

p - ciśnienie gazu

Znajdź, jak zmienia się ciśnienie gazu przy założeniu:

a) Zmienia się temperatura, objętość jest stała
b) Zmienia się objętość, temperatura jest stała

Zadanie 1.2. W wyniku eksperymentu, określono następujące związki dla gazu:

$$\frac{\partial p}{\partial V} = -n \cdot R \cdot T \cdot f(V)$$

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{n \cdot R}{V} - 2 \cdot n \cdot R \cdot T \cdot a$$

gdzie:

n – liczba moli

a – znana stała

f(V) – nieznana funkcja zależna od objętości

Znajdź równanie stanu dla tego gazu. **Wskazówka**: Wykorzystaj twierdzenie Schwarza w celu określenia f(V) a następnie scałkuj jedno z powyższych równań i wykorzystaj drugie z nich by określić wartość stałej całkowania.

Zadanie 1.3. Stężenie dane jest funkcją:

$$c(x, y, z) = A(xy + yz + zx)$$

Gdzie: A - stała

a) Znajdź kierunek w którym następuje najszybsza zmiana stężenia od punktu o współrzędnych (1,1,1). Określ szybkość tych zmian (czyli długość wektora gradientu).

b) Oblicz cosinusy kierunkowe (definicja: en.wikipedia.com...)

Zadanie 1.4. Oblicz gradient funkcji:

a) $f(x) = \frac{x^3+\sin x}{x^2} + \tan x + 3x^2$

b) $f(x,y) = 2x^2y^3 + x\sin y + x\cos zy^2$

c) $f(x,y,z) = 4x^2y^3z + \frac{xz}{y^2} + x^2\cos y^2 z$

Zadanie 1.5. Oblicz gradient oraz laplasjan funkcji:

$$f(x,y,x) = x^2 - yz + xz^2$$

Podaj wartość gradientu w punktach (1,1,1) oraz (3,2,1).

Zadanie 1.6. Oblicz dywergencję pola wektorowego:

a) $f(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}x^2yz, \frac{1}{2}\ xy^2z, -xyz^2\right)$

b) $f(x,y,z) = \left(2xyz^2, sin(xyz), \frac{xy}{z^2}\right)$

Zadanie 1.7. Potencjał elektryczny dipola dany jest zależnością:

$$\phi(x,y,z) = \frac{\mu x}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+z^2)}$$

Gdzie:

ε_0 – przenikalność elektryczna próżni

μ – moment dipolowy

Oblicz **pole elektryczne** $\vec{E} = -\nabla\phi$

Zadanie 1.8. Oblicz dywergencję **pola elektrycznego** z poprzedniego zadania.

Zadanie 1.9. Sprawdź, czy poniższe pole może być potencjalne:

a) $\vec{F}(x,y,z) = x^2yz\vec{\imath} + xz^2\vec{\jmath} + x^2y^3z\vec{k}$

b) $\vec{F}(x,y,z) = \frac{1}{2}yz^2\vec{\imath} + \frac{1}{2}xz^2\vec{\jmath} + xyz\vec{k}$

Zadanie 1.10. Rozwiń w szereg Maclaurina funkcje:

a) $sin(x)$

b) $cos(x)$

c) $ln(x+1)$