2.Prawo zachowania masy

Zdefiniujmy najpierw pewne podstawowe pojęcia:

- **Układ** - obszar przestrzeni o określonych granicach
- **Ośrodek ciągły** - obszar przestrzeni którego rozmiary charakterystyczne są wystarczająco duże, aby można było mówić, że parametry i właściwości układu zmieniają się w sposób ciągły. Kryterium ciągłości definiuje bezwymiarowa liczba Knudsena:

$$Kn = \frac{2 \cdot droga\ swobodna}{rozmiar\ charakterystyczny} \tag{2.1}$$

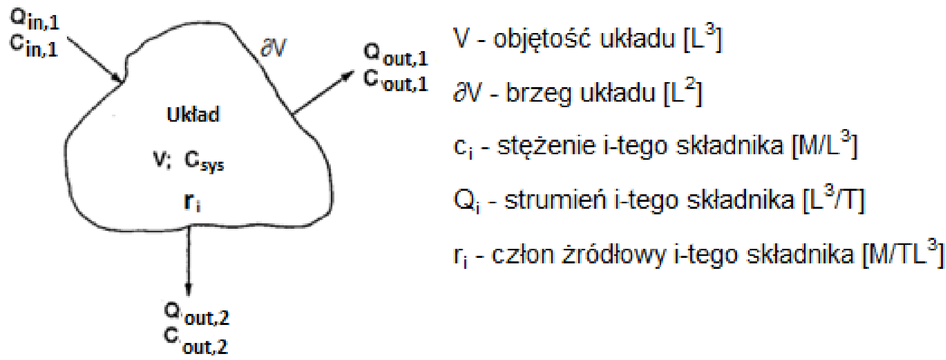
Gdy:

$$Kn \ll 1 \tag{2.2}$$

to możemy traktować ośrodek jako ciągły.

2.1. Bilans masy

Rozważmy następujący układ (ośrodek jest ciągły):



Rys.2.1. Poglądowe przedstawienie układu

- Źródło - część układu w której zachodzi produkcja/znikanie składnika
  - dodatnie - produkcja masy
  - ujemne ("ujście") - znikanie masy

Na razie będziemy zakładać, że człon źródłowy wynosi zero. Bilans masy dla takiego układu wygląda następująco:

$$\frac{d}{dt}\left[VC_{sys}\right] = \sum_{i=1}^{N} Q_i^{in} c_i^{in} - \sum_{j=1}^{M} Q_j^{out} c_j^{out} \tag{2.3}$$

Znaczenie fizyczne powyższego równania jest następujące: prędkość akumulacji masy, równa jest różnicy pomiędzy strumieniami masy wchodzącymi i wychodzącymi z układu w jednostce czasu. Pamiętajmy, że wszystkie wielkości w równaniu (2.3) mogą zależeć od czasu!
Zróżniczkujmy teraz lewą stronę (2.3):

$$V\frac{dC_{sys}}{dt} + C_{sys}\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{N} Q_i^{in} c_i^{in} - \sum_{j=1}^{M} Q_j^{out} c_j^{out} \tag{2.4}$$

Możemy zauważyć, że przy stałej objętości systemu $\left(\frac{dV}{dt} = 0\right)$:

$$\frac{dC_{sys}}{dt} = \frac{1}{V}\left(\sum_{i=1}^{N} Q_i^{in} c_i^{in} - \sum_{j=1}^{M} Q_j^{out} c_j^{out}\right) \tag{2.5}$$

W trakcie semestru często będziemy rozpatrywać układy w stanie ustalonym, co jest równe stwierdzeniu, że wszystkie pochodne czasowe się zerują. Wtedy cała lewa strona naszego wyjściowego równania jest równa zeru, w efekcie czego:

$$\sum_{i=1}^{N} Q_i^{in} c_i^{in} = \sum_{j=1}^{M} Q_j^{out} c_j^{out} \tag{2.6}$$

W ogólnym przypadku, możemy używać gęstości materiału zamiennie ze stężeniem. Wtedy równanie (2.4) przyjmuje postać:

$$V\frac{d\rho_{sys}}{dt} + \rho_{sys}\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{N} Q_i^{in} \rho_i^{in} - \sum_{j=1}^{M} Q_j^{out} \rho_j^{out} \tag{2.7}$$

Przy założeniu stałej gęstości:

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{N} Q_i^{in} - \sum_{j=1}^{M} Q_j^{out} \tag{2.8}$$

Tutaj mała dygresja: dobrą analogią prawa zachowania masy jest konto bankowe. Przyjmując, że konto traktujemy jako system, rolę strumieni wpływających spełniają przychody, natomiast wypływających - wydatki. Widzimy, że jeśli przychody i wydatki nie są sobie równe, to w miarę upływu czasu nastąpi zmiana w ilości odłożonych pieniędzy na koncie (nasze $\frac{dc}{dt}$), przy czym możliwa jest zarówno zmiana dodatnia (więcej wpływa niż wypływa) jak i ujemna (na odwrót). Analogia ta działa również dla członów źródłowych, gdzie rolę źródła dodatniego może spełniać oprocentowanie konta (pieniądze są "tworzone" wewnątrz układu), natomiast rolę ujścia spełniają np. opłaty manipulacyjne za obsługę konta.

Przykład 2.1.

Wpływ i wypływ wody z jeziora są sobie równe, i wynoszą Q. W pewnym momencie (t_0=0) strumień wpływający ulega zanieczyszczeniu i od tego momentu stężenie zanieczyszczenia w tym strumieniu utrzymuje się na stałym poziomie c_{in}. Zakładając, że mamy idealne mieszanie wewnątrz jeziora (czyli $c_{sys} = c_{out} = c$) oblicz:

a) Stężenie zanieczyszczenia w jeziorze w funkcji czasu (zakładając że w chwili t_0 było ono równe 0).

b) Stężenie zanieczyszczenia w jeziorze przy $t \to \infty$.

Rozwiązanie

a) Zacznijmy od zapisania bilansu masy. Podstawowym równaniem jest dla nas równanie (2.4):

$$V\frac{dC_{sys}}{dt} + C_{sys}\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^{N} Q_i^{in} c_i^{in} - \sum_{j=1}^{M} Q_j^{out} c_j^{out}$$

Korzystając z założeń zadania (pojedynczy wpływ i wypływ o tej samej szybkości, idealne mieszanie), możemy je zredukować do postaci :

$$V\frac{dc}{dt} = Qc_{in} - Qc \quad \Rightarrow \quad \frac{dc}{dt} = \frac{Q}{V}c_{in} - \frac{Q}{V}c$$

Otrzymujemy zatem następujące równanie różniczkowe (już po rozdzieleniu zmiennych):

$$\frac{dc}{c_{in} - c} = \frac{Q}{V}dt$$

Stosujemy podstawienie:

$$x = \frac{c}{c_{in}} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dc}{c_{in}}$$

dostając w rezultacie:

$$\frac{dx}{1 - x} = \frac{Q}{V}dt$$

Po scałkowaniu otrzymujemy:

$$ln\frac{1 - x}{A} = -\frac{Q}{V}t$$

Gdzie: A - stała całkowania

$$1 - x = Ae^{-\frac{Q}{V}t}$$

$$1 - \frac{c}{c_{in}} = Ae^{-\frac{Q}{V}t}$$

$$\frac{c}{c_{in}} = 1 - Ae^{-\frac{Q}{V}t}$$

$$c = c_{in}\left(1 - Ae^{-\frac{Q}{V}t}\right)$$

Teraz potrzebujemy obliczyć wielkość stałej całkowania, do czego wykorzystamy nasz warunek początkowy $c(t = 0) = 0$:

$$0 = c_{in}\left(1 - Ae^{-\frac{Q}{V}0}\right)$$

$$0 = c_{in}(1 - A)$$

$$A = 1$$

Ostatecznie dostajemy:

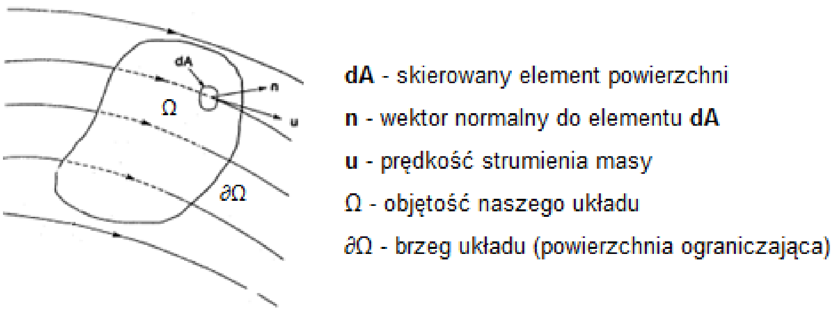
$$c(t) = c_{in}\left(1 - e^{-\frac{Q}{V}t}\right)$$

b) Dla nieskończenie dużych czasów możemy zauważyć, że człon ekspotencjalny w powyższym równaniu będzie dążył do zera, a zatem:

$$c(t = \infty) = c_{in}$$

2.2. Całkowa i różniczkowa postać prawa zachowania masy

Do tej pory patrzyliśmy na system "makroskopowo", teraz zejdziemy do poziomu mikroskopowego. Rozważmy następujący system, wymieniający masę z otoczeniem:

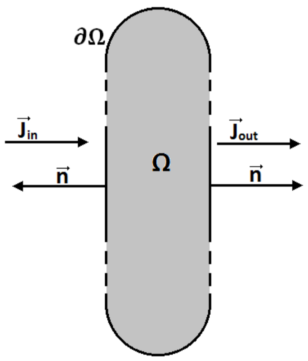


Rys.2.2. Zobrazowanie rozważanego układu.

Wymiana masy/pędu/energii układu z otoczeniem może zachodzić tylko w jeden sposób - poprzez powierzchnię ograniczającą układ. Wymienianą masę możemy zapisać jako:

$$-\iint_{\partial\Omega} \rho_i \vec{n} \cdot \vec{u} dA = -\iint_{\partial\Omega} \rho_i \overrightarrow{dA} \cdot \vec{u} \tag{2.9}$$

Mimo, iż zapisaliśmy nasze równanie w postaci całkowej, jego znaczenie jest dokładnie takie samo jak prawej strony równania (2.3) - przedstawia ono różnicę pomiędzy strumieniami wpływającymi i wypływającymi z układu. Poprzez całkowanie po całej powierzchni ograniczającej układ, uwzględniamy zarówno strumienie wpływające jak i wypływające, natomiast obecność iloczynu skalarnego sprawia, że są one zliczane z przeciwnymi znakami (bardzo ważne - proszę to przemyśleć). Znak ujemny wynika również z iloczynu skalarnego: kąt między prędkością strumienia wpływającego a wektorem normalnym do powierzchni wynosi 180^o, zatem otrzymana wartość iloczynu skalarnego wynosi -1, podczas gdy my chcemy zliczać strumienie wchodzące jako dodatnie (bo powodują przyrost masy w czasie). Wymusza to zmianę znaku (kolejna rzecz do przemyślenia):



Rys.2.3. Relacje pomiędzy wektorami powierzchni a strumieniami

Żeby móc zapisać pełny bilans masy, musimy zapisać w analogicznej postaci lewą stronę równania (2.3):

$$\frac{dm}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \rho_i dV \tag{2.10}$$

Po zestawieniu równań (2.10) i (2.9) otrzymujemy pełny analog równania (2.3):

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \rho_i dV = -\iint_{\partial\Omega} \rho_i \overrightarrow{dA} \cdot \vec{u} \tag{2.11}$$

Po przeniesieniu wszystkich członów na jedną stronę równania:

$$\iint_{\partial\Omega} \rho_i \overrightarrow{dA} \cdot \vec{u} + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \rho_i dV = 0 \tag{2.12}$$

W ten sposób otrzymaliśmy **całkową postać prawa zachowania masy**. Jak widać, po jednej stronie równania mamy całkę objętościową, po drugiej powierzchniową. Aby zredukować zagadnienie do tego samego wymiaru, wykorzystamy poznane na poprzednich zajęciach prawo Gaussa-Ostrogradskiego o treści:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \overrightarrow{dS} = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{F}) dV \tag{2.13}$$

Po zastosowaniu (2.13) do (2.12) dostajemy w rezultacie:

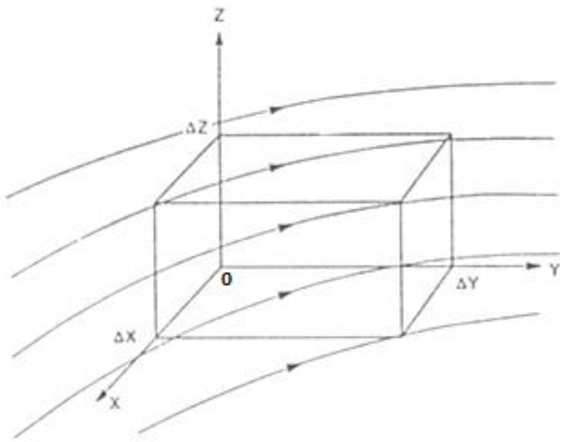
$$\iiint_{\Omega} \nabla \cdot (\rho_i \vec{u}) dV + \frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Omega} \rho_i dV = 0 \tag{2.14}$$

Dzięki sprowadzeniu obu całek do tego samego wymiaru, możemy teraz opuścić znak całki otrzymując **różniczkową postać prawa zachowania masy**:

$$\nabla \cdot (\rho_i \vec{u}) + \frac{\partial \rho_i}{\partial t} = 0 \tag{2.15}$$

Równanie (2.15) jest najbardziej podstawowym równaniem wykorzystywanym przez nas podczas zajęć!!

Spróbujmy wyprowadzić teraz równanie (2.15) w nieco inny sposób. Rozważmy układ, dla ułatwienia niech ma on kształt prostopadłościanu:



Rys.2.3 Rozważany układ

Objętość takiego układu możemy zdefiniować jako:

$$\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z \tag{2.16}$$

Zdefiniujmy teraz pojęcia **strumienia masy $\vec{J}$,** w postaci którą będziemy stosować aż do końca semestru. Strumień ten jest wektorem, który określa ilość masy przechodzącej przez jednostkową powierzchnię w jednostce czasu. Jego jednostką jest: $\left[\frac{kg}{m^2 s}\right]$

Dla każdej równoległej pary ścian, możemy zapisać wypadkowy strumień masy przechodzący przez nią (czyli różnicę strumienia wchodzącego z jednej strony i wychodzącego z drugiej). Np. dla pary prostopadłej do osi "*y*":

$$J_y = \left[-u_y \rho_i + \left(\rho_i + \frac{\partial \rho_i}{\partial y} \Delta y\right)\left(u_y + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y\right)\right] \Delta x \Delta z \tag{2.17}$$

Analogiczne równania możemy zapisać dla pozostałych par równoległych ścian. Warto zwrócić tutaj uwagę, że strumień wchodzący ma znak minus, zgodnie z tym co powiedzieliśmy pod równaniem (2.9). Potem konieczna będzie zmiana tego znaku. Po rozpisaniu (2.17) otrzymujemy:

$$J_y = \left[-u_y\rho_i + u_y\rho_i + \rho_i\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + u_y\frac{\partial \rho_i}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial \rho_i}{\partial y}\Delta y\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y\right]\Delta x\Delta z \tag{2.18}$$

Ostatni człon w nawiasie jest wystarczająco mały aby go zaniedbać. Po uwzględnieniu (2.16) możemy zapisać:

$$J_y = \rho_i\frac{\partial u}{\partial y}\Delta V + u_y\frac{\partial \rho_i}{\partial y}\Delta V \approx \xrightarrow{\Delta V \to dV} \approx \frac{\partial}{\partial y}(\rho_i u_y)dV \tag{2.19}$$

Zastosowane w (2.19) przejście na dV wynika z faktu, iż rozważamy objętości nieskończenie małe. Ponieważ układy rzeczywiste mają skończoną objętość, to równania dla nich będą całką po rozważanych przez nas nieskończenie małych objętościach. Podobnie jak w (2.10) możemy więc zapisać (uwzględniając strumienie dla wszystkich par ścian):

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_\Omega \rho_i dV = -\iiint_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x}(\rho_i u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_i u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho_i u_z)\right)dV \tag{2.20}$$

Można zauważyć, że pod całką po prawej stronie równania znajduje się tak naprawdę dywergencja $\rho\vec{u}$. Zwróćmy też uwagę na pojawienie się minusa po prawej stronie (2.20), który jest tym samym minusem co w równaniu (2.9). Ma on proste uzasadnienie fizyczne, mianowicie jeśli strumień masy wchodzi do układu, to lewa strona (czyli przyrost masy) musi być dodatnia. Wymusza to zmianę znaku po prawej stronie.

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_\Omega \rho_i dV = -\iiint_\Omega \nabla \cdot (\rho_i\vec{u})dV \tag{2.21}$$

Po opuszczeniu znaku całki dostaniemy znów równanie (2.15). Jeśli dodatkowo uwzględnimy naszą definicję strumienia masy, to otrzymamy:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{J}_i = 0 \tag{2.22}$$

2.3. Człony źródłowe

Przed sformułowaniem równania (2.3) uczyniliśmy założenie braku członów źródłowych. Ich uwzględnienie nie sprawi jednak większych problemów. W przypadku równania (2.3) otrzymujemy:

$$\frac{d}{dt}[VC_{uk}] = \sum_{i=1}^{N} Q_i^{in}c_i^{in} - \sum_{j=1}^{M} Q_j^{out}c_j^{out} + \sum_{k=1}^{L} Vr_i \tag{2.23}$$

Jak widzimy, pojawił się dodatkowy człon. **Możemy traktować pojawiające się r_i jako tempo produkcji/znikania danego składnika w jednostkowej objętości.** W przypadku zapisu całkowego i różniczkowego dostajemy odpowiednio:

$$\iiint_\Omega \nabla \cdot (\rho_i\vec{u})dV + \frac{\partial}{\partial t}\iiint_\Omega \rho_i dV = \iiint_\Omega r_i dV \tag{2.24}$$

oraz:

$$\nabla \cdot (\rho_i\vec{u}) + \frac{\partial \rho_i}{\partial t} = r_i \tag{2.25}$$