

## 6. Właściwości mechaniczne II

Na bieżących zajęciach będziemy kontynuować tematykę właściwości mechanicznych, którą zaczęliśmy 2 tygodnie temu. Ponownie będzie nam potrzebny wcześniej wprowadzony słowniczek:

$\sigma$  - tensile stress - naprężenie rozciągające

$\varepsilon$  - tensile strain - odkształcenie przy rozciąganiu

$E$  - Young's modulus - moduł Younga

$\tau$  - shear stress - naprężenie ścinające

$\gamma$  - shear strain - odkształcenie przy ścinaniu

$G$  - shear modulus - moduł sprężystości poprzecznej (Kirchhoffa)

$p$  - pressure - ciśnienie

$K$  - bulk modulus - moduł odkształcalności objętościowej (Helmholtza)

$\Delta$  - volume strain - odkształcenie objętościowe

$\sigma_y$  - yield strength - granica plastyczności

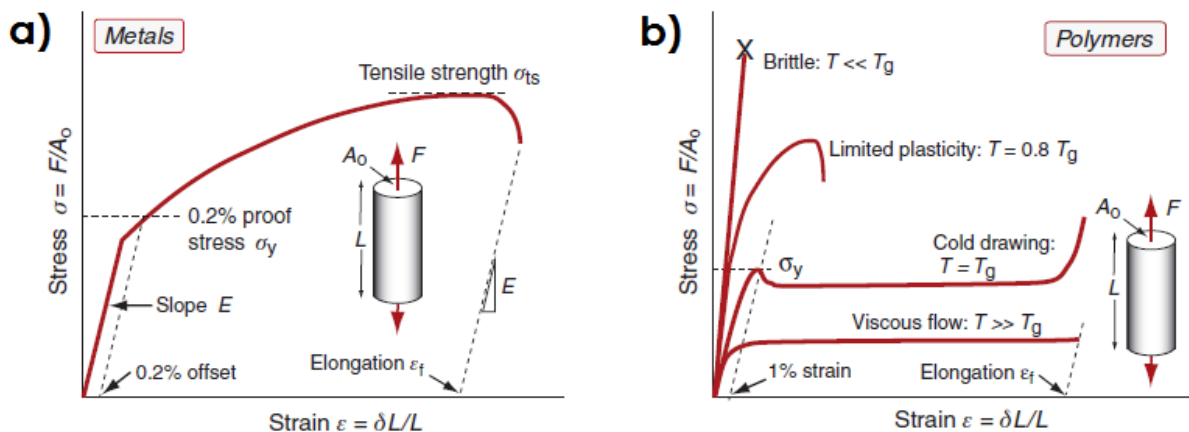
$\sigma_{ts}$  - tensile strength - wytrzymałość na rozciąganie

$\nu$  - Poisson's ratio - współczynnik Poissona

Na początek, trochę bliżej niż do tej pory, przyglądnijmy się wykresom krzywych naprężenia w funkcji odkształcenia.

### 6.1. Krzywa naprężenia w funkcji odkształcenia

Poprzednio omawialiśmy krzywe naprężenia w funkcji odkształcenia w sposób poglądowy (Rys. 4.2). Poniżej, zostały one przedstawione w sposób nieco bardziej szczegółowy:



Rys. 6.1. Przykładowe krzywe naprężenia w funkcji odkształcenia dla a) metali b) polimerów.

W przypadku krzywej dla metali, możemy zauważyć w jaki sposób zdefiniowana jest wartość granicy plastyczności  $\sigma_y$  - jest to wartość dla której próbka ulega trwałemu odkształceniu na poziomie 0.2% (definicja pozostaje ta sama dla ściskania i rozciągania). Przy dalszym rozciąganiu próbka zaczyna ulegać umocnieniu (ang. *work hardening*), aż do osiągnięcia wytrzymałości na rozciąganie  $\sigma_{ts}$ , po której osiągnięciu próbka zaczyna się przewężać, a następnie ulega zerwaniu. Warto tu zwrócić uwagę, w jaki sposób wyznaczone są wartości  $\sigma_y$  i  $\varepsilon_f$  - nie jest to proste rzutowanie na oś odkształceń, ale rzutowanie z wykorzystaniem linii o nachyleniu równemu modułowi Younga.

W przypadku polimerów sytuacja jest nieco bardziej złożona, gdyż ich zachowanie będzie w dużej mierze zależało od temperatury i jej relacji do temperatury przejścia szklistego  $T_g$  (a właściwie *brittle-ductile transition temperature*  $T_b$ , ale często się one pokrywają). Dla tej temperatury, wytrzymałość na rozciąganie jest wyznaczana dla trwałego odkształcenia na poziomie 1%, po którym wydłużenie

następuje przy praktycznie stałym naprężeniu (prostowanie się łańcuchów polimeru). Następnie obserwujemy gwałtowne umocnienie materiału oraz jego zerwanie.

Występuje tutaj jeszcze jedna ważna różnica w zachowaniu metali oraz polimerów/ceramiki - o ile w przypadku metali możemy wyznaczyć  $\sigma_y$  w temperaturze pokojowej to dla pozostałych dwóch grup, w większości przypadków są to wartości tak duże, że materiały ulegają zerwaniu zanim zostaną one osiągnięte.

Po przekroczeniu granicy plastyczności, pojawia się w materiale odkształcenie plastyczne  $\varepsilon_{pl}$ , które w przeciwieństwie do odkształcenia elastycznego, występującego w zakresie obowiązywania prawa Hooke'a, nie jest odkształceniem odwracalnym:

$$\varepsilon_{pl} = \varepsilon_{tot} - \frac{\sigma_y}{E} \quad (6.1)$$

Materiał odkształcany plastycznie, podobnie jak miało to miejsce w przypadku odkształceń elastycznych, gromadzi energię zgodnie z równaniem (4.12). Nie możemy jednak tutaj bezpośrednio zastosować równania (4.13), ze względu na nieliniową zależność  $\sigma(\varepsilon)$  w zakresie plastyczności. Chcąc obliczyć całkowitą energię zgromadzoną przez materiał aż do zerwania, musimy wykorzystać równanie:

$$W_{pl} = \int_0^{\varepsilon_f} \sigma d\varepsilon_{pl} \quad (6.2)$$

Krzywe naprężenia w funkcji odkształcenia oferują wiele zalet, ale ich wyznaczanie ma jedną, zasadniczą wadę - są to próby niszczące. Jednym ze sposobów, aby ominąć tę słabość, są badania twardości, np. metodą Vickersa, w której próbnik wciskany jest w materiał, wywołując w nim trwałe odkształcenie na bardzo małej powierzchni. Twardość definiujemy jako stosunek siły przyłożonej do sondy pomiarowej, do odkształconej powierzchni w materiale:

$$H = \frac{F}{A} \quad (6.3)$$

Relacja pomiędzy twardością w skali Vickersa a granicą plastyczności wygląda następująco:

$$H_v \approx \frac{\sigma_v}{3} \quad (6.4)$$

## 6.2. Wytrzymałość dla przypadku idealnego

Wiązania między atomami przypominają trochę sprężyny - gdy przypomnimy sobie wykresy energii i siły z zajęć nr 2, możemy zauważyć, że w miarę oddalania się od punktu równowagi, na nasz atom będą działały coraz większe siły, starające się go przywrócić z powrotem do pozycji równowagowej. Zakładając, że nasz atom znajduje się w prostej sieci kubicznej typu *sc* o parametrze sieci  $a_0$  i działa na niego siła  $F$ , możemy zapisać:

$$\sigma = \frac{F}{a_0^2} \quad (6.5)$$

Zakładając, że typowe wiązanie ulega zerwaniu przy odkształceniu około 10%:

$$F \approx \frac{S a_0}{10} \quad (6.6)$$

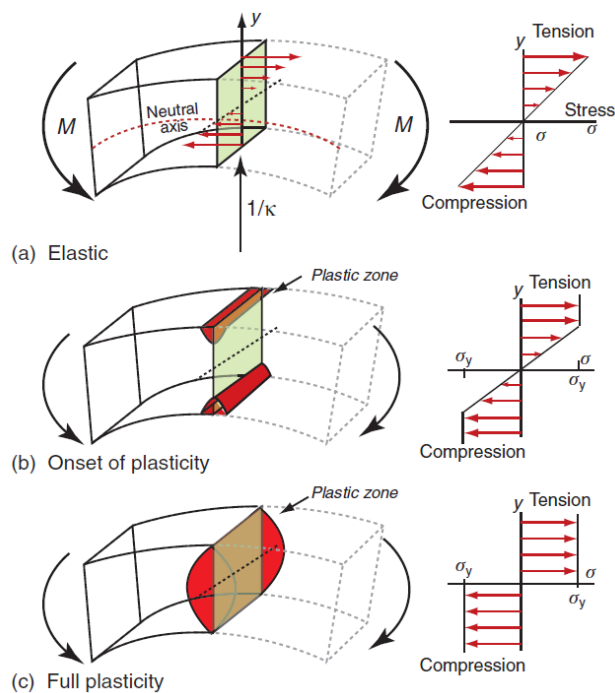
gdzie  $S$  to sztywność wiązania (omówiona na wykładzie) równa  $\frac{d^2U}{dR^2}$ . Zatem idealna granica plastyczności powinna wynieść:

$$\sigma_{ideal} \approx \frac{F_{max}}{a_0^2} = \frac{S}{10a_0} = \frac{E}{10} \Rightarrow \frac{\sigma_{ideal}}{E} \approx \frac{1}{10} \quad (6.7)$$

Jak możemy łatwo sprawdzić, niestety tego typu zależność praktycznie nie występuje w rzeczywistych materiałach, co związane jest z defektami ich struktury takimi jak np. dyslokacje.

### 6.3. Zagadnienia plastyczne

W trakcie poprzednich zajęć, wyznaczaliśmy indeksy materiałowe dla przypadków, kiedy musiał być spełniony warunek odpowiedniej sztywności. W trakcie bieżących, będziemy skupiać się na sytuacjach, gdy materiał musi być w stanie znieść obciążenie zadane przez daną siłę. Rozważmy ponownie przypadek zginania:



Rys. 6.2. Zginanie a) przypadek elastyczny b) przypadek początku plastyczności c) zakres plastyczności.

Do tej pory zastanawialiśmy się tylko nad przypadkiem w pełni elastycznym. Jednak w pewnym momencie naprężenia w materiale wywołane momentem zginającym  $M$ , mogą osiągnąć wartość granicy plastyczności i wtedy część materiału (*plastic zone*), zacznie się nam odkształcać plastycznie.

Przypomnijmy sobie równanie 5.4.:

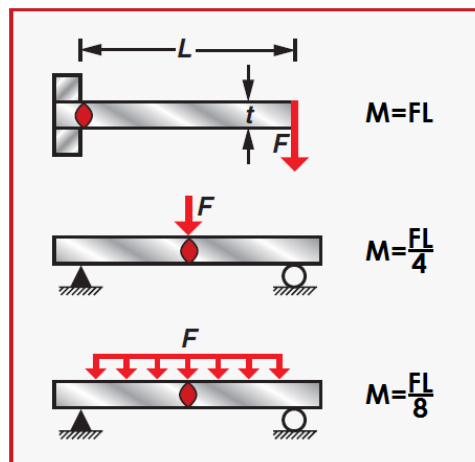
$$\frac{\sigma}{y} = \frac{M}{I} = E\kappa \quad (6.8)$$

Poprzednio skupialiśmy na dwóch członach po prawej jego stronie (równanie 5.6). Tym razem, interesować nas będą człony po lewej stronie:

$$\sigma_{\max} = \frac{My_m}{I} = \frac{M}{Z_e}, \quad (6.9)$$

gdzie  $\sigma_{\max}$  opisuje największe naprężenie pojawiające się w materiale, w punkcie o największym odkształceniu  $y_m$  od osi neutralnej. W momencie gdy naprężenie osiągnie wartość  $\sigma_y$  (Rys. 6.2b), w obszarach cechujących się największym naprężeniem zacznie pojawiać się obszar plastyczności, zatem nasz element, nawet jeśli nie ulegnie zniszczeniu, będzie już trwale odkształcony i może przestać być w stanie spełniać swoją funkcję.

Występujący moment zginający będzie w dużej mierze zależał od sposobu umocowania próbki oraz sposobu przyłożenia siły:



Rys. 6.3. Moment zginający w zależności od sposobu umocowania próbki i obciążenia.

Maksymalna jego wartość powyżej której materiał ulega zniszczeniu (czy raczej pełnemu uplastycznieniu), wyraża się wzorem:

$$M_f = Z_p \sigma_y \quad (6.10)$$

Pojawiające się w równaniach 6.9 i 6.10 wielkości  $Z_p$  i  $Z_e$  są ściśle powiązane z geometrią przekroju. Poniżej zestawione zostały wartości dla ich podstawowych typów.

Tab. 6.1. Wartości  $Z_p$  i  $Z_e$  dla różnych przekrojów.

Section shape	Area $A$ $m^2$	Elastic section modulus $Z_e$ $m^3$	Plastic section modulus $Z_p$ $m^3$
	$b h$	$\frac{bh^2}{6}$	$\frac{bh^2}{4}$
	$\pi r^2$	$\frac{\pi}{4} r^3$	$\frac{\pi}{3} r^3$
	$\pi (r_o^2 - r_i^2)$ $\approx 2\pi r t$	$\frac{\pi}{4 r_o} (r_o^4 - r_i^4)$ $\approx \pi r^2 t$	$\frac{\pi}{3} (r_o^3 - r_i^3)$ $\approx \pi r^2 t$

