Opis w przestrzeni stanów układów sterowania

1. Układ sterowania ze sprzężeniem zwrotnym od stanu (dla D=0 i y_z=0):

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left(A - BK\right)x(t)$$
$$y(t) = Cx(t) \qquad (1)$$

gdzie: x – zmienne stanu,

y – zmienne wyjściowe,

A – macierz stanu,

B – macierz sterowania,

C – macierz wyjścia,

K – macierz wzmocnień.

Opis w przestrzeni stanów układów sterowania

2. Układ sterowania ze sprzężeniem zwrotnym od stanu i członem całkującym dla przypadku jednej wielkości sterującej (dla D=0 i $y_z \neq 0$):

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx(t)}{dt} \\ \dfrac{dx_i(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & -Bk_i \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 1 \end{bmatrix} y_z(t) \qquad (2)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ x_i(t) \end{bmatrix}$$

gdzie: k_i – wzmocnienie, przez które należy pomnożyć dodatkową zmienną stanu,

x_i – dodatkowa zmienna stanu:

$$x_i(t) = \int_{t_0}^{t} e(t)dt \quad \rightarrow \quad \frac{dx(t)}{dt} = e(t) = y_z(t) - y(t)$$

gdzie: y_z – wielkość zadana.

Opis w przestrzeni stanów układów sterowania

3. Układ sterowania ze sprzężeniem zwrotnym od stanu: zastosowanie obserwatora Luenbergera pełnego rzędu (dla D=0 i $y_z \neq 0$):

$$\begin{bmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A-BK & BK \\ 0 & A-HC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \varepsilon(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} y_z(t) \qquad (3)$$

$$y = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \varepsilon(t) \end{bmatrix}$$

gdzie: ε – błędy estymacji,

H – macierz wzmocnień obserwatora Luenbergera.

Opis w przestrzeni stanów układów sterowania

4. Układ sterowania ze sprzężeniem zwrotnym od stanu: zastosowanie obserwatora Luenbergera zredukowanego rzędu dla przypadku gdy zmienna wyjściowa (lub zmienne wyjściowe) równa się zmiennej stanu (lub zmiennym stanu) (dla D=0 i $y_z \neq 0$):

$$\begin{bmatrix} \frac{dx(t)}{dt} \\ \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & BK_b \\ 0 & \mathrm{A_b - H_b A_{ab}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \varepsilon(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} y_z(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ \varepsilon(t) \end{bmatrix} \tag{4}$$

gdzie: K_b – macierz wzmocnień, przez które należy pomnożyć estymowaną część wektora stanu,

H_b – macierz wzmocnień obserwatora zredukowanego rzędu,

A_b, A_{ab} – macierze powstałe po podzieleniu wektora stanu na cześć dostępną pomiarowo (x_a) oraz na część odtwarzaną (x_b):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_a(t) \\ \dot{x}_b(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_a & A_{ab} \\ A_{ba} & A_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(t) \\ x_b(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_a \\ B_b \end{bmatrix} u(t) \qquad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_a(t) \\ x_b(t) \end{bmatrix}$$

Opis w przestrzeni stanów układów sterowania

5. Układ sterowania ze sprzężeniem zwrotnym od stanu: zastosowanie algorytmu LQ (dla D=0 i y_z=0):

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left(A - BK\right)x(t) \qquad (5)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

6. Układ sterowania ze sprzężeniem zwrotnym od stanu: algorytm LQ ze wzmocnieniem wielkości zadanej (dla D=0 i $y_z \neq 0$):

$$\frac{dx(t)}{dt} = \left(A - BK\right)x(t) + BNy_z \qquad (6)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

gdzie: N – macierz wzmocnień wielkości zadanej. Elementy tej macierzy wyliczone są z zależności:

$$N = KN_x + N_u$$

N_x oraz N_u wyliczane są dla *dim y=dim u*: $\begin{bmatrix} N_x \\ N_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}$

Opis w przestrzeni stanów układów sterowania

7. Układ sterowania ze sprzężeniem zwrotnym od stanu: zastosowanie algorytmu LQG (dla D≠0 i y_z=0):
Obiekt sterowania opisany jest w przestrzeni stanów równaniami:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) + Gw(t) \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) + v(t) \end{aligned} \qquad (7)$$

gdzie: $w(t)$ – szum sterowania (stanu),
$v(t)$ – szum wyjścia (pomiarowy).

Równanie filtru Kalmana:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t) + H\big(y(t) - C\hat{x}(t) - Du(t)\big) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) + Du(t) \end{aligned} \qquad (8)$$

gdzie: $\hat{x}$ – estymowany wektor stanu,
$\hat{y}$ – estymowane wyjście.

Równanie filtru Kalmana po zgrupowania wyrazów:

$$\begin{aligned} \dot{\hat{x}}(t) &= \big(A - HC\big)\hat{x}(t) + \big(B - HD\big)u(t) + Hy(t) \\ \hat{y}(t) &= C\hat{x}(t) + Du(t) \end{aligned} \qquad (9)$$

Opis w przestrzeni stanów układów sterowania

Poszukiwane prawo sterowania:

$$u(t) = -K\hat{x}(t) \qquad (10)$$

Równania algorytmu LQG (dla y_z=0):

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = \left(A - BK - HC + HD\right)\hat{x}(t) + Hy(t) \\ u(t) = -K\hat{x}(t) \end{cases} \qquad (11)$$

Uwagi w zakresie zastosowania filtru Kalmana w algorytmie LQG:

→ filtr Kalmana wykorzystuje się w układzie sterowania tak samo jak obserwator Luenbergera pełnego rzędu,

→ filtr Kalmana można uważać za specjalny rodzaj obserwatora stanu o wartościach własnych określonych przez kowariancje zakłóceń stochastycznych oddziałujących na obiekt sterowania,

→ zastosowanie filtru Kalmana jest możliwe gdy para (A, C) jest obserwowalna,

→ w miarę obniżania się poziomu szumów wartości własne filtru Kalmana dążą do -∞.

Opis w przestrzeni stanów układów sterowania

Literatura:

1. Kaczorek T., Teoria sterowania i systemów. Wydawnictwo Naukowe PWN, 1999.

2. Ogata K., Modern control engineering. Upper Sadlle River. Prentice Hall, 2002.

3. Golnaraghi F., Kuo C. B., Automatic Control Systems. John Wiley&Sons, 2010.

4. Byrski W., Obserwacja i sterowanie w systemach dynamicznych, Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie, 2007.

5. Googwin G. C., Graebe S. E., Salgado M. E., Control System Design, Prentice Hall. Upper Saddle River, New Jersey 2001.

6. Gosiewski Z., Siemieniako F., Automatyka. T. II, Wydawnictwo Politechniki Białostockiej, Białystok 2007