

Całkowanie numeryczne

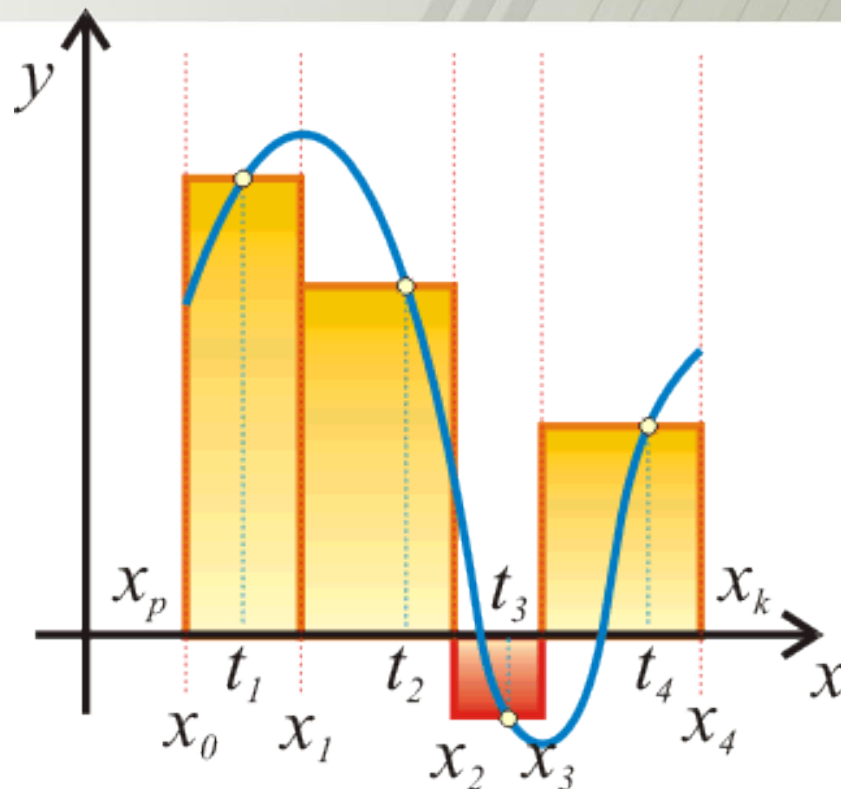
Obliczanie całki oznaczonej

Problemy:

- całka oznaczone nie zawsze da się łatwo policzyć w **sposób analityczny**
- **metoda numeryczna** działa zawsze, ale otrzymane rozwiązanie jest przybliżone , czy obarczone pewnym błędem.

Całka oznaczona Riemanna

$$\int_a^b f(x) dx$$



Całka oznaczona jest interpretowana jako suma pól obszarów ograniczonych wykresem funkcji $f(x)$ oraz osią OX . Obszary leżące pod osią mają w tej interpretacji pola ujemne.

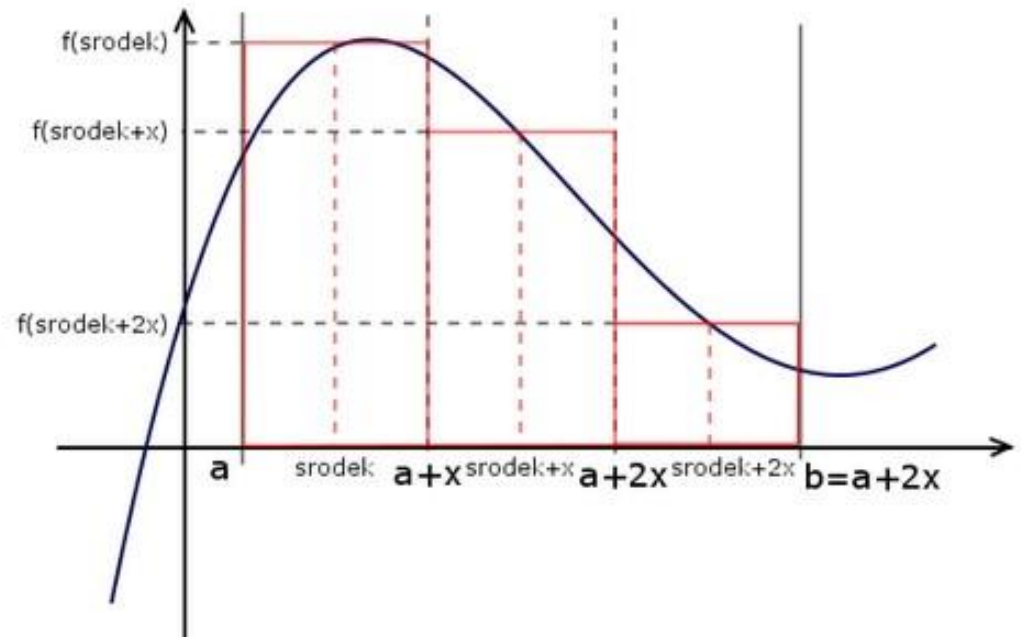
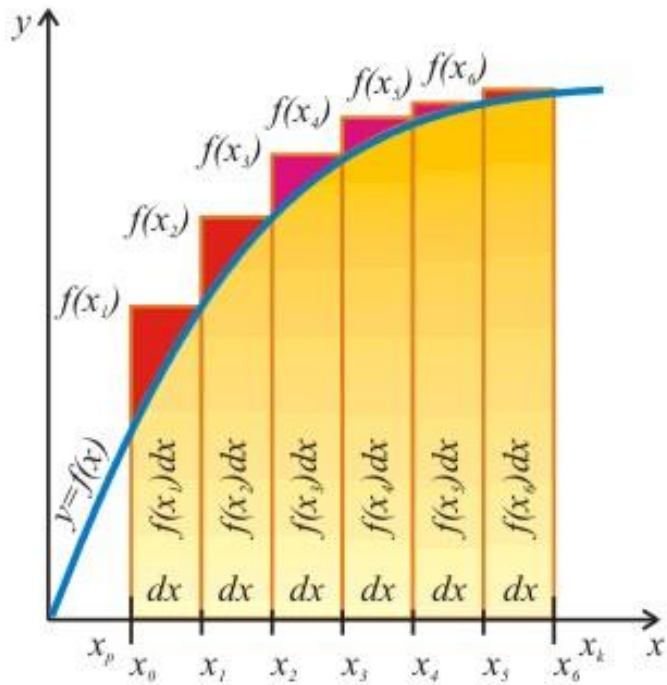
Przedstawienie problemu:

Dana jest funkcja $f(x)$ oraz przedział $\langle a \ b \rangle$, w którego granicach chcemy obliczyć całkę oznaczoną funkcji.

Wybrane metody:

- metoda prostokątów,
- metoda trapezów,
- metoda Simpsona,
- metoda Monte Carlo

Metoda prostokątów



Metoda prostokątów – algorytm

1. Przedział całkowania $\langle a, b \rangle$ dzielimy na n podprzedziałów równej długości.
2. Obliczamy długość podprzedziału:

$$dx = \frac{b - a}{n}$$

3. Wyznaczamy punkty $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, gdzie $x_0=a$, a $x_n=b$:

$$x_i = x_0 + \frac{i}{n}(b - a)$$

4. Dla każdego wyznaczonego w ten sposób punktu x_i obliczamy wartość funkcji $f(x_i)$ w tym punkcie $f_i=f(x_i)$.

Metoda prostokątów – algorytm

5. Obliczamy sumę pól prostokątów dla poszczególnych podprzedziałów:

$$S = f_1 dx + f_2 dx + \dots + f_n dx$$

lub po wyprowadzeniu wspólnego czynnika przed nawias:

$$S = dx(f_1 + f_2 + \dots + f_n)$$

Otrzymana suma jest przybliżoną wartością całki oznaczonej funkcji $f(x)$ w przedziale $\langle a, b \rangle$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f\left(a + i \frac{b-a}{n}\right)$$

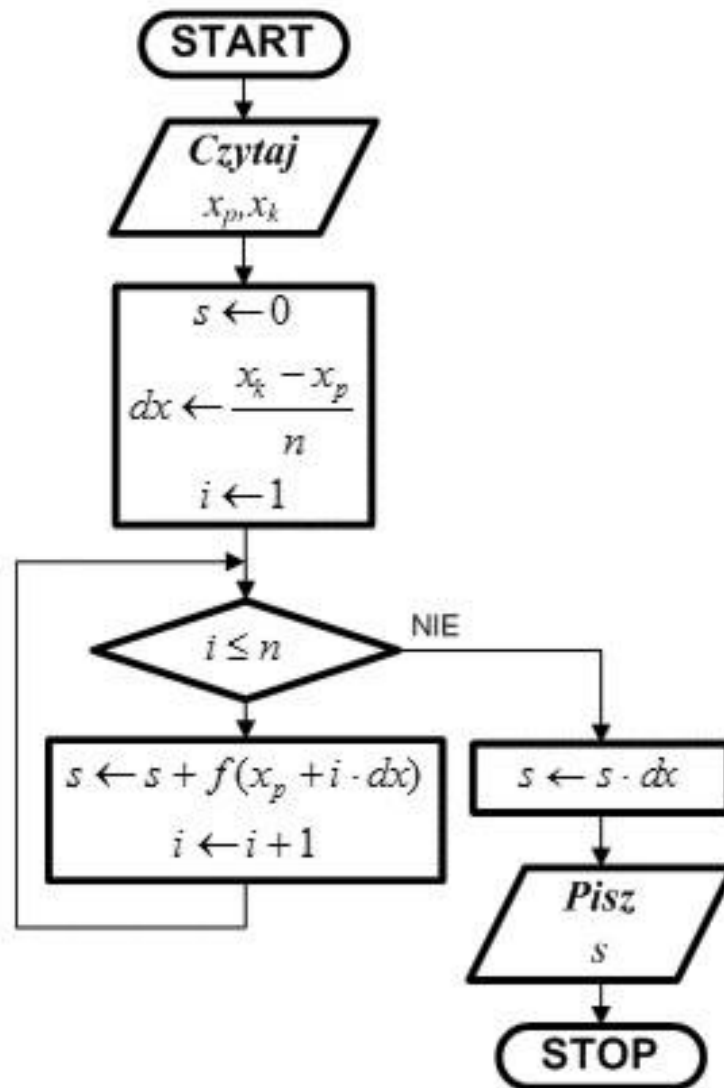
Metoda prostokątów – schemat blokowy

Dane wejściowe:

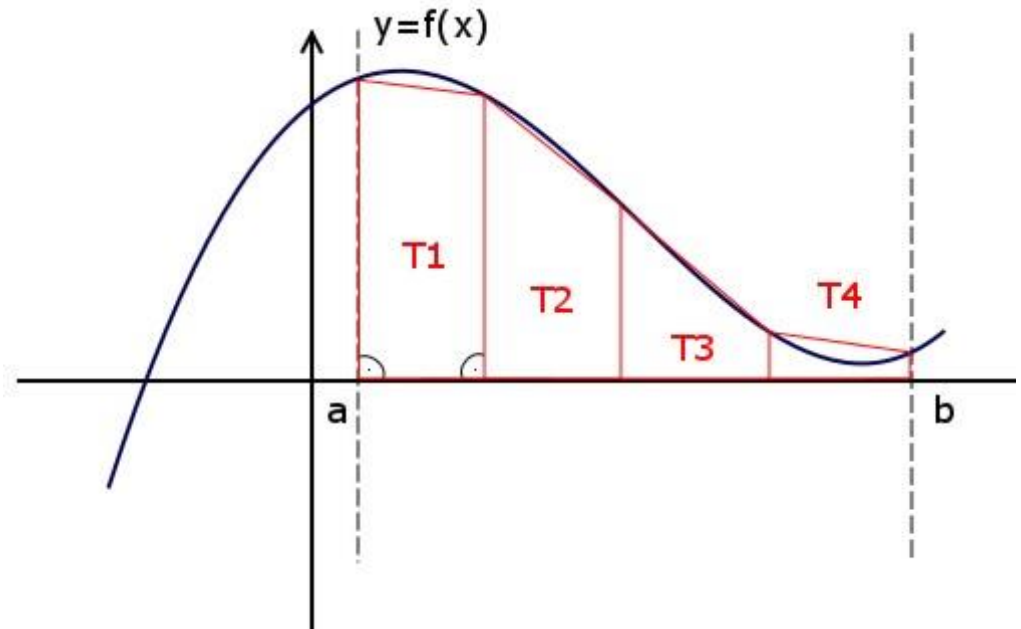
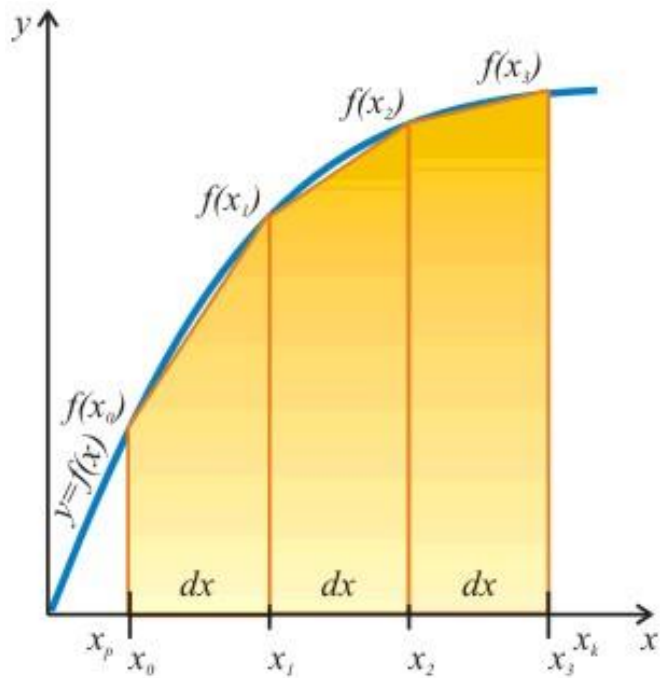
$f(x)$ – funkcja, której całkę liczymy
 x_p, x_k – końce przedziału całkowania
 n – liczba podprzedziałów

Dane wyjściowe:

s – wartość całki oznaczonej



Metoda trapezów



Metoda trapezów – algorytm

1. Przedział całkowania $\langle a, b \rangle$ dzielimy na n podprzedziałów równej długości.
2. Obliczamy długość podprzedziału:

$$dx = \frac{b - a}{n}$$

3. Wyznaczamy punkty $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, gdzie $x_0 = a$, a $x_n = b$:

$$x_i = x_0 + \frac{i}{n}(x_n - x_0)$$

4. Dla każdego wyznaczonego w ten sposób punktu x_i obliczamy wartość funkcji $f(x_i)$ w tym punkcie $f_i = f(x_i)$.

Metoda trapezów – algorytm

5. Dla każdego podprzedziału obliczamy pole trapezu według wzoru:

$$P_i = \frac{f_{i-1} + f_i}{2} dx$$

Przybliżona wartość całki jest sumą pól wszystkich trapezów:

$$S = P_1 + P_2 + \dots + P_n$$

czyli:

$$S = \frac{f_0+f_1}{2} dx + \frac{f_1+f_2}{2} dx + \dots + \frac{f_{n-2}+f_{n-1}}{2} dx + \frac{f_{n-1}+f_n}{2} dx$$

$$S = dx \left(f_1 + f_2 + \dots + f_{n-1} + \frac{f_0 + f_n}{2} \right)$$

Metoda trapezów – schemat blokowy

Dane wejściowe:

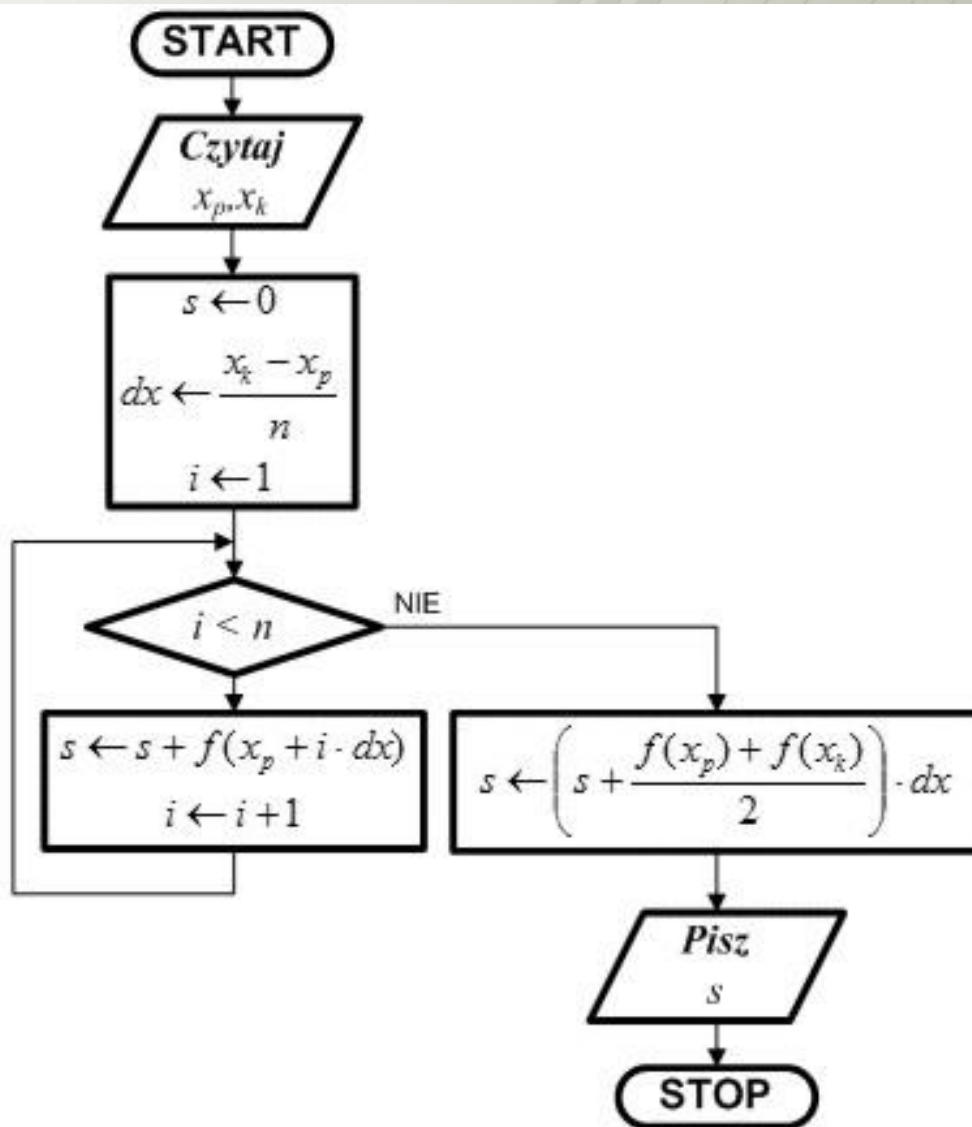
$f(x)$ – funkcja, której całkę liczymy

x_p, x_k – końce przedziału całkowania

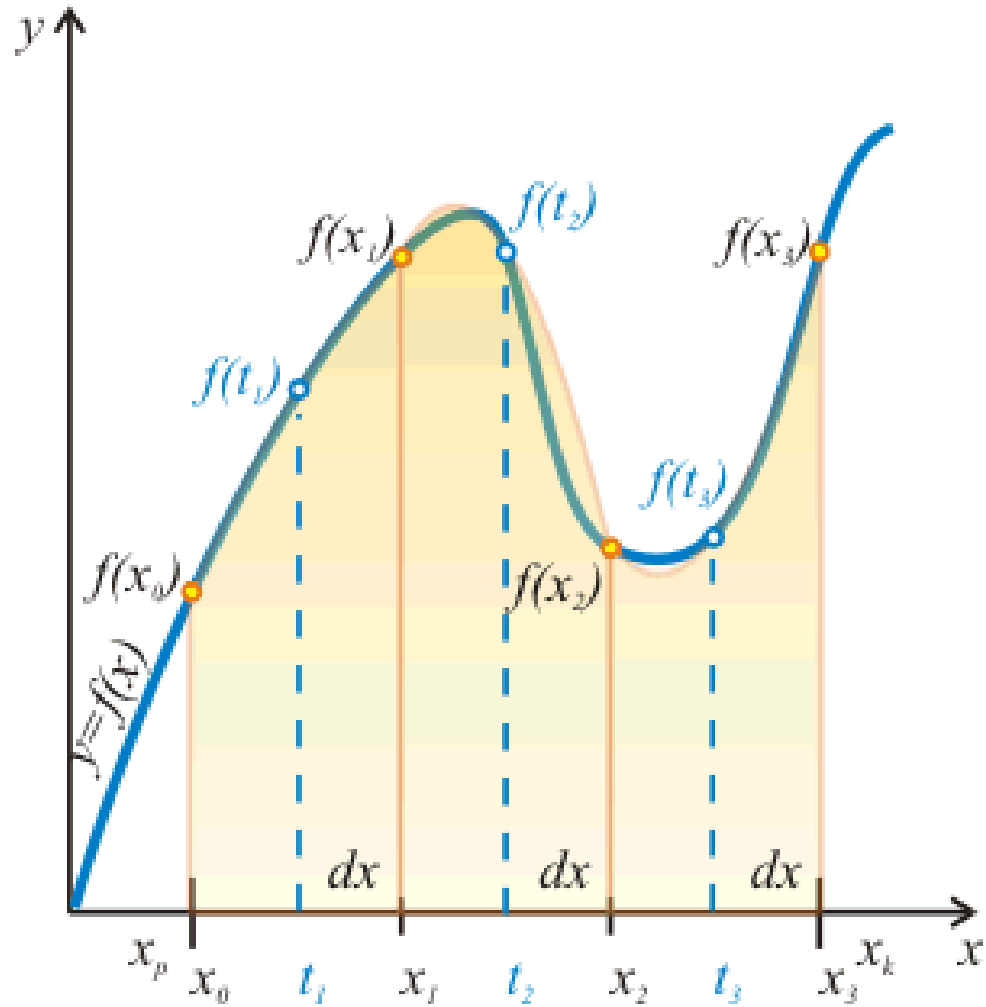
n – liczba podprzedziałów

Dane wyjściowe:

s – wartość całki oznaczonej



Metoda Simpsona



Metoda Simpsona – algorytm

1. Przedział całkowania $\langle a, b \rangle$ dzielimy na n podprzedziałów równej długości.
2. Obliczamy długość podprzedziału:

$$dx = \frac{b - a}{n}$$

3. Wyznaczamy punkty $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, gdzie $x_0 = a$, a $x_n = b$:

$$x_i = x_0 + \frac{i}{n}(x_n - x_0)$$

Metoda Simpsona – algorytm

4. Dla każdego z dwóch sąsiednich punktów wyznaczamy punkt środkowy t_i ze wzoru (dla $i=1,2 \dots n$):

$$t_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$$

5. Dla każdego wyznaczonego w ten sposób punktu obliczamy wartość funkcji $f(x)$ w tym punkcie $f_i=f(x_i)$, $f_{t_i}=f(t_i)$.
6. W każdym podprzedziale $\langle x_{i-1} \ x_i \rangle$ przybliżamy funkcję za pomocą paraboli $g(x)$ o następującej postaci (dla $i=1,2, \dots n$):

$$g_i(x) = a_i x^2 + b_i x + c_i$$

Metoda Simpsona – algorytm

7. Zamiast wyliczać współczynniki funkcji $g_i(x)$ wyznaczamy pole pod parabolą w danym przedziale $\langle x_{i-1} \quad x_i \rangle$ dla $i=1,2, \dots, n$

$$P_i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} g_i(x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} (a_i x^2 + b_i x + c_i) dx$$

8. Funkcja pierwotna ma wzór, dla $i=1,2, \dots, n$

$$G_i = \int g_i(x) dx = \frac{a_i}{3} x^3 + \frac{b_i}{2} x^2 + c_i x + C$$

9. Wartość całki obliczamy ze wzoru, dla $i=1, 2, \dots, n$:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} g_i(x) dx = G_i(x_i) - G_i(x_{i-1})$$

Metoda Simpsona – algorytm

10. Po uproszczeniach i odpowiednich podstawieniach otrzymujemy, dla $i=1, 2, \dots, n$:

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} g_i(x) dx = \frac{(x_n - x_0)}{6n} (f_{i-1} + f_i + 4f_{ti})$$

11. Wartość całej całki otrzymamy sumując pola z każdego przedziału $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} \left(\sum_{i=1}^n f_{i-1} + \sum_{i=1}^n f_i + 4 \sum_{i=1}^n f_{ti} \right)$$

12. Ponieważ

$$\sum_{i=1}^n f_{i-1} + \sum_{i=1}^n f_i = f_0 + f_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_i$$

Metoda Simpsona – algorytm

Ostateczny wzór na wyliczenie wartości całki metodą Simpsona:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n} \left(f_0 + f_n + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f_i + 4 \sum_{i=1}^n f_{ti} \right)$$

Metoda Simpsona – schemat blokowy

Dane wejściowe:

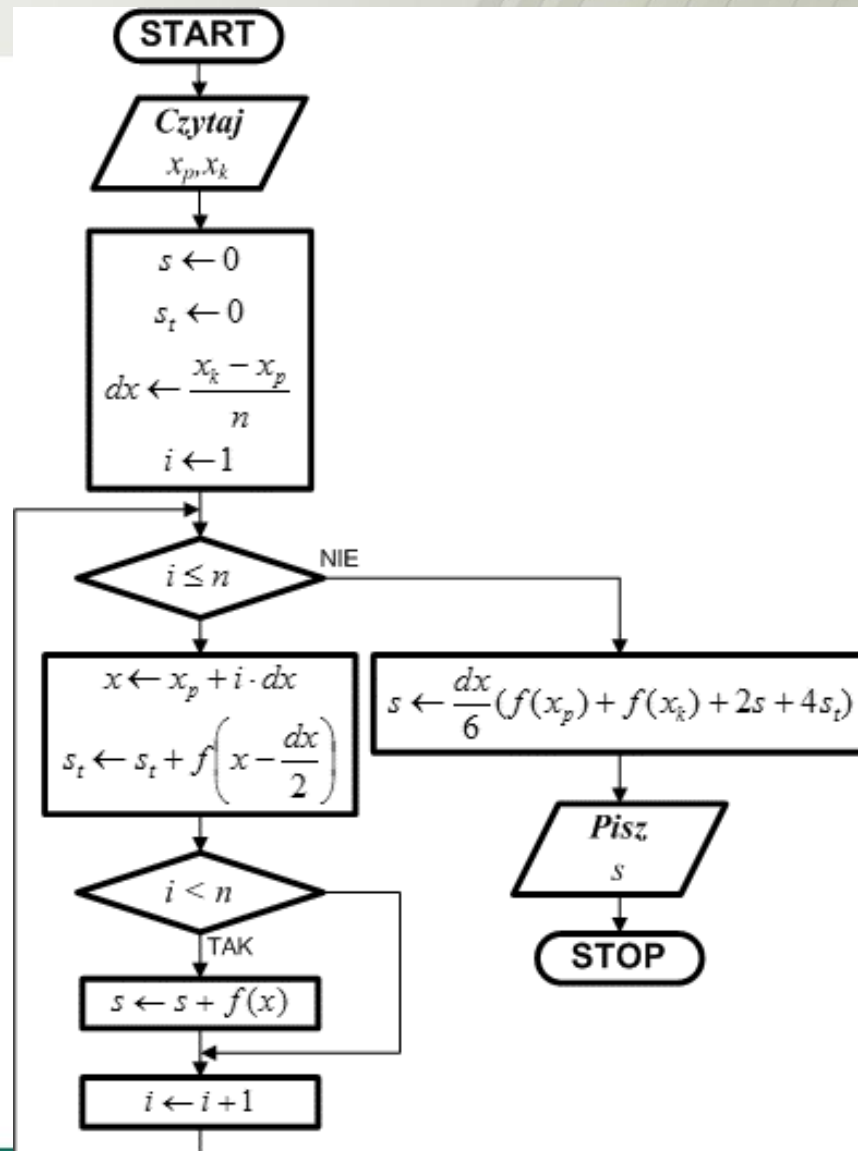
$f(x)$ – funkcja, której całkę liczymy

x_p, x_k – końce przedziału całkowania

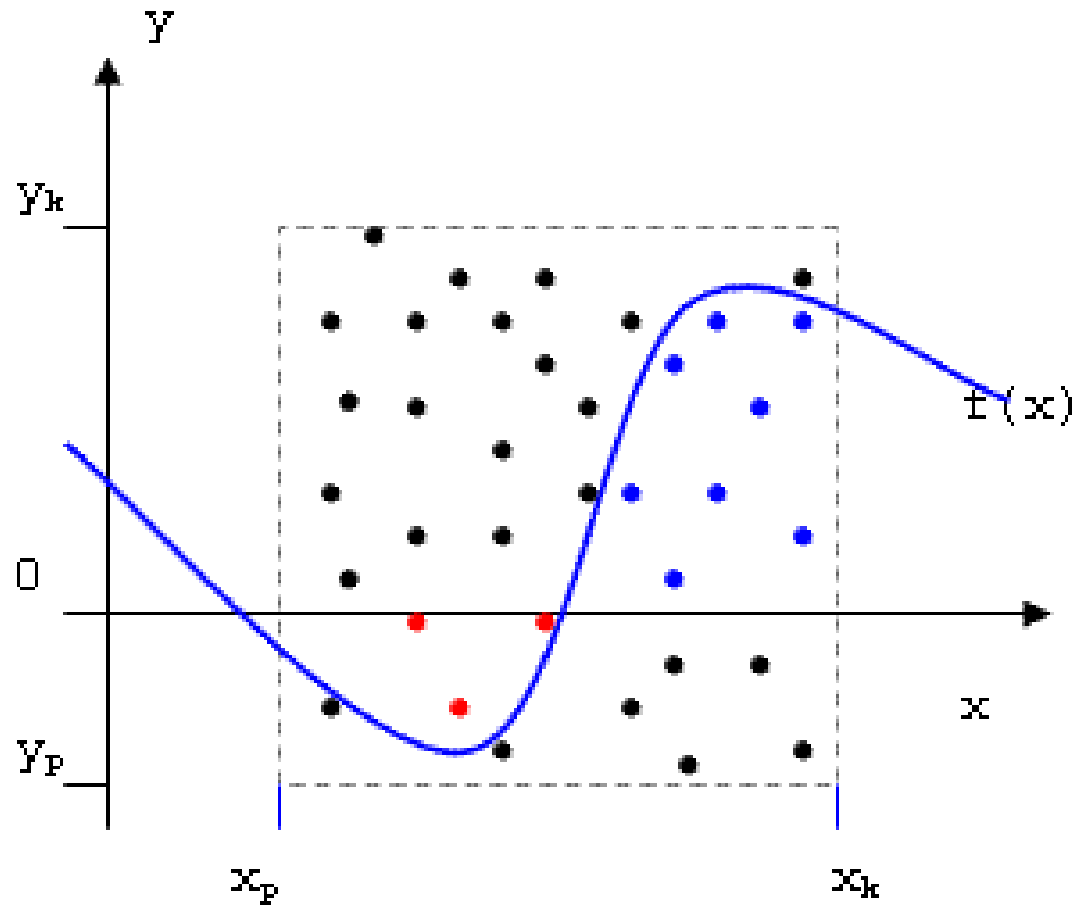
n – liczba podprzedziałów

Dane wyjściowe:

s – wartość całki oznaczonej



Metoda Monte Carlo



Metoda Monte Carlo

Chcemy wyznaczyć pole koła o promieniu r wpisanego w kwadrat o boku równym $2r$.

1. Wyznaczamy wewnątrz kwadratu dużą liczbę losowych punktów
2. Zliczamy te punkty, które leżą we wnętrzu koła
3. Pole koła jest w przybliżeniu równe:

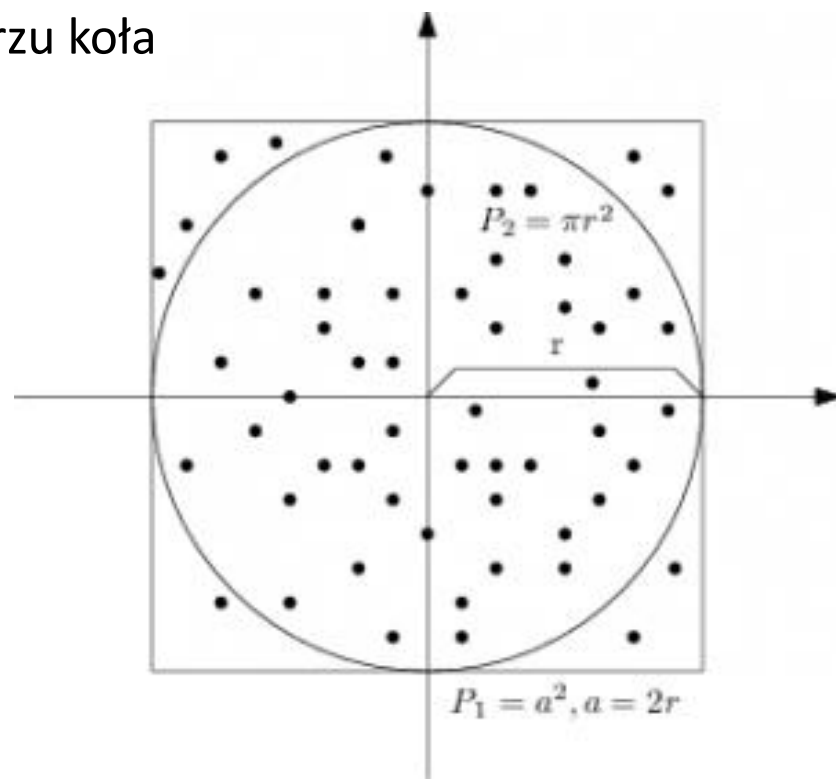
$$P_o = \frac{n_o}{n} P$$

gdzie:

P – pole kwadratu

n_o – liczba punktów w kole

n – liczba wszystkich punktów



Metoda Monte Carlo – algorytm

1. Dla danej funkcji $f(x)$, której całkę oznaczoną chcemy obliczyć w przedziale całkowania $\langle a, b \rangle$, wyznaczamy prostokąt obejmujący pole pod wykresem tej funkcji o wysokości h i długości podstawy $(b-a)$.
2. Następnie losujemy n punktów i zliczamy te punkty n_w , które wpadają w pole pod wykresem funkcji. Wartość całki wyraża się wzorem przybliżonym:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{n_w}{n} h(b-a)$$

Otrzymany wzór ma kilka wad. Na przykład w ogólnym przypadku trudno wyznaczyć wysokość h . Również kłopoty pojawiają się, gdy funkcja zmienia znak w przedziale całkowania.

Metoda Monte Carlo – algorytm

Częściej jako metodę Monte Carlo przyjmuje się metodę, która wyznacza średnią z wartości funkcji w przedziale całkowania na podstawie serii losowo wybranych współrzędnych x .

Następnie średnia ta jest mnożona przez długość przedziału całkowania i otrzymujemy przybliżoną wartość całki oznaczonej.

Wzór ma następującą postać:

$$\int_a^b f(x) dx \approx (b - a) \frac{\sum_{i=1}^n f(x_{\text{losowe}})}{n}$$

Metoda Monte Carlo – schemat blokowy

Dane wejściowe:

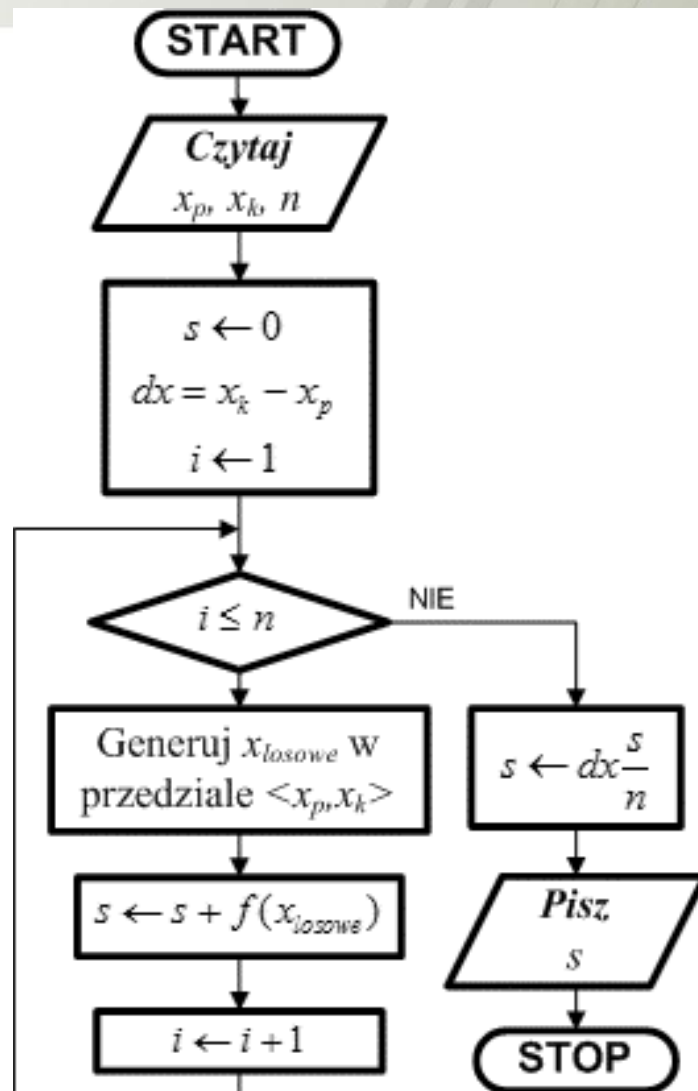
$f(x)$ – funkcja, której całkę liczymy

x_p, x_k – końce przedziału całkowania

n – liczba podprzedziałów

Dane wyjściowe:

s – wartość całki oznaczonej



Wyznaczanie miejsc zerowych funkcji

Wyznaczanie miejsc zerowych funkcji

Szukamy rozwiązania równania:

$$f(x) = 0$$

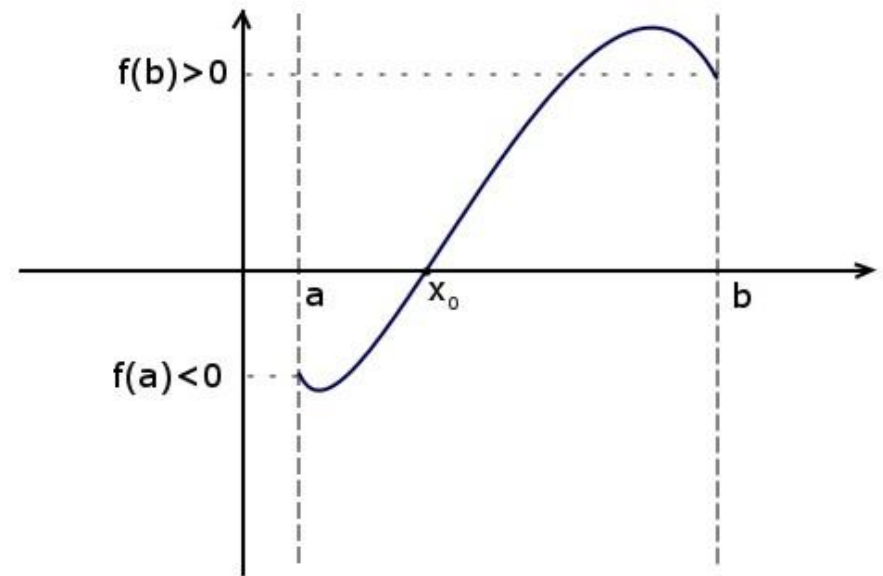
Sposoby wyznaczania miejsc zerowych:

- **metoda analityczna** (dokładna) – nie zawsze da się zastosować
- **metoda numeryczna** (przybliżona) – działa zawsze, ale otrzymane rozwiązanie jest przybliżone (w określonym przedziale, z zadaną dokładnością)

Wyznaczanie miejsc zerowych funkcji

Założenia dla metod numerycznych:

- funkcja jest określona i ciągła w zadanym przedziale,
- funkcja ma różne znaki na końcach przedziału,
- często wymagana jest ścisła monotoniczność funkcji (rosnąca/malejąca w całym przedziale),
- jeżeli w danym przedziale jest wiele miejsc zerowych, metoda wychwytuje tylko jedno z nich



Wyznaczanie miejsc zerowych funkcji

Przedstawienie problemu:

Dana jest funkcja $f(x)$ oraz przedział $\langle a \ b \rangle$, w którym chcemy znaleźć miejsce zerowe z zadaną dokładnością ε .

Wybrane metody:

- **metoda bisekcji** (połowienia przedziału, równego podziału),
- **regula falsi** (fałszywa linia prosta),
- **metoda stycznych** (Newtona).



Metoda bisekcji

Algorytm wyznacza miejsce zerowe funkcji $f(x)$ z dokładnością do pewnego ε (dokładność tą ustalamy na początku programu) w przedziale obustronnie domkniętym $[a, b]$ przy następujących założeniach:

1. Funkcja $f(x)$ jest określona i ciągła w przedziale $[a, b]$.
2. W końcach przedziału $[a, b]$ wartości funkcji są przeciwnych znaków .

W przedziale $[a, b]$ funkcja ma co najmniej jedno miejsce zerowe.

Metoda bisekcji – algorytm

1. Sprawdzamy, czy pierwiastkiem równania jest punkt leżący w środku przedziału $\langle a, b \rangle$ (tj. $x_0 = (a+b)/2$), czyli czy $f(x_0) = 0$ ($|f(x_0)| < \varepsilon$).
2. Jeżeli tak jest, algorytm kończy się (znaleźliśmy rozwiązanie). W przeciwnym wypadku x_1 dzieli przedział $\langle a, b \rangle$ na dwa mniejsze przedziały $\langle a, x_0 \rangle$ oraz $\langle x_0, b \rangle$.
3. Wybierany jest ten przedział, dla którego spełnione wartości na końcach są przeciwnych znaków, tzn. $f(x_0) \cdot f(a) < 0$ albo $f(x_0) \cdot f(b) < 0$.
4. Cały proces powtarzany jest od punktu 1 dla wybranego przedziału.

Działanie algorytmu kończy się w punkcie 2, lub po osiągnięciu żądanej dokładności przybliżenia pierwiastka.

Metoda bisekcji – schemat blokowy

Dane wejściowe:

$f(x)$ – funkcja, której pierwiastek liczymy
 a, b – końce przedziału, w którym szukamy pierwiastka

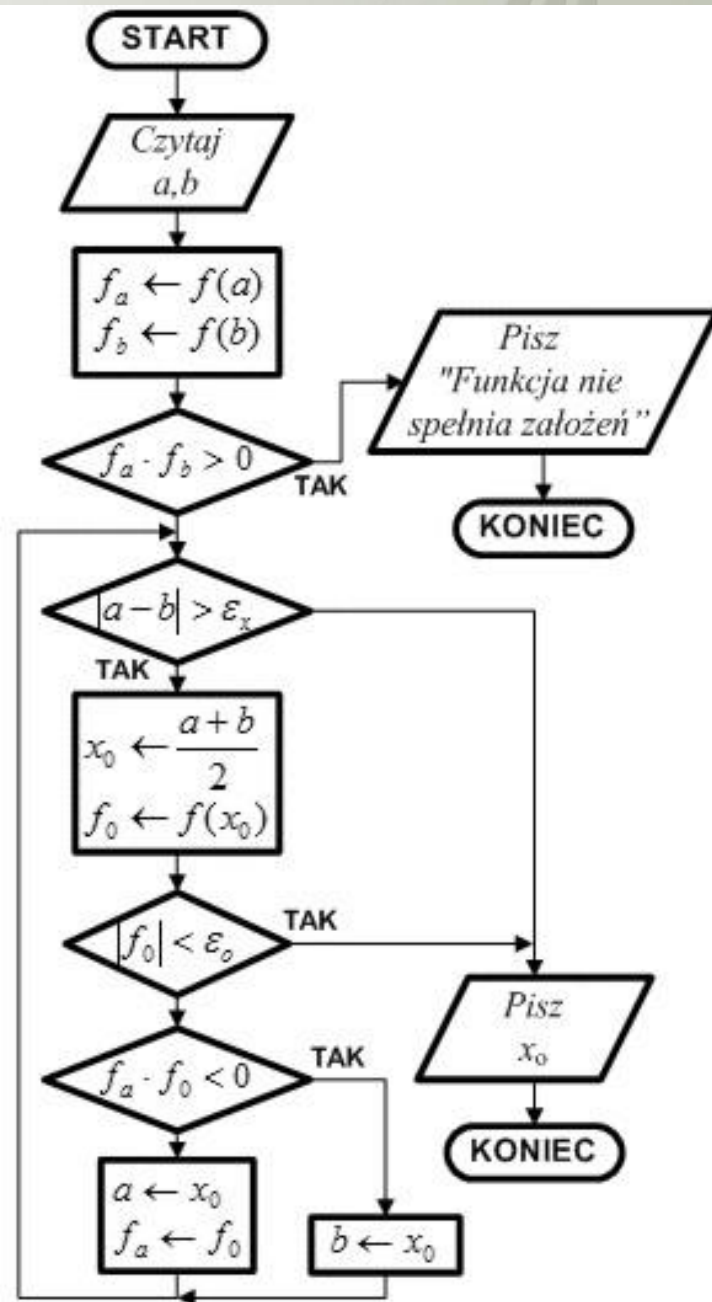
Dane wyjściowe:

x_0 – pierwiastek funkcji $f(x)$

Zmienne pomocnicze:

ε_x – określa dokładność porównania z zerem

ε_0 – określa dokładność wyznaczania pierwiastka x_0





Reguła falsi

Założenia:

1. Funkcja $f(x)$ jest określona i ciągła w przedziale $\langle a, b \rangle$.
2. W końcach przedziału $\langle a, b \rangle$ wartości funkcji są przeciwnych znaków .

Reguła fałsi – algorytm

1. Punkty wykresu na krańcach przedziału łączymy sieczną, która przetnie oś OX w punkcie x_0 .

$$x_0 = a - f(a) \times \frac{b - a}{f(b) - f(a)}$$

2. Obliczamy wartość funkcji w punkcie x_0 i sprawdzamy, czy spełnia warunek:

$$|f(x_0)| < \varepsilon$$

3. Jeżeli spełnia warunek, to x_0 jest naszym miejscem zerowym z zadana dokładnością.

Reguła falsi – algorytm

4. W przeciwnym wypadku miejsce zerowe jest w jednym z podprzedziałów $\langle a, x_0 \rangle$ lub $\langle x_0, b \rangle$. Sprawdzamy, w którym, badając znaki na ich końcach
5. Wybrany podprzedział traktujemy jako nowy przedział zawierający pierwiastek i znów dzielimy na dwie części, prowadząc sieczną i sprawdzając wartość funkcji w punkcie x_0 .
6. Kontynuujemy procedurę aż do znalezienia pierwiastka z zadana dokładnością.

Reguła falsi – schemat blokowy

Dane wejściowe:

$f(x)$ – funkcja, której pierwiastek liczymy

a, b – końce przedziału, w którym szukamy pierwiastka

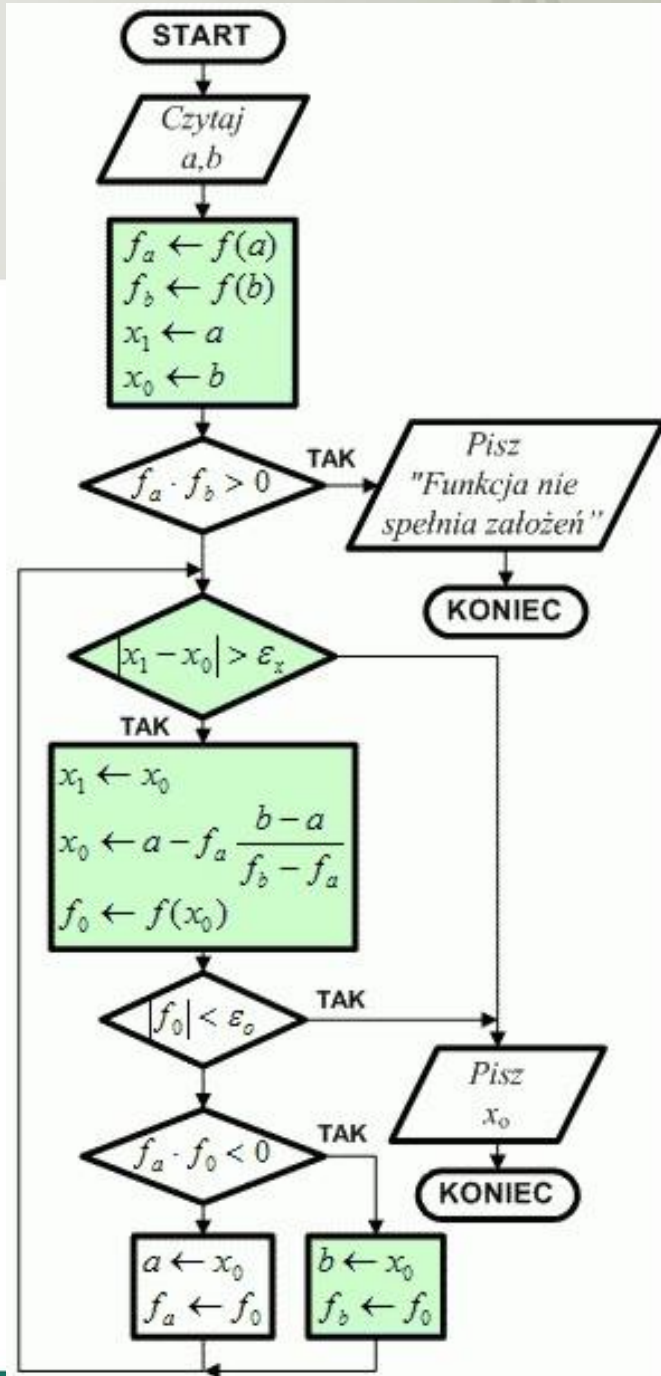
Dane wyjściowe:

x_0 – pierwiastek funkcji $f(x)$

Zmienne pomocnicze:

ε_x – określa dokładność porównania z zerem

ε_0 – określa dokładność wyznaczania pierwiastka x_0





Metoda stycznych (Newtona)

Założenia:

1. Funkcja $f(x)$ jest określona i ciągła.
2. W końcach przedziału $\langle a, b \rangle$ wartości funkcji są przeciwnych znaków .
3. W przedziale $\langle a, b \rangle$ pierwsza pochodna $f'(x)$ jest różna od zera.
4. Pierwsza i druga pochodna funkcji $f(x)$ mają stały znak w całym przedziale.

Metoda stycznych (Newtona)

1. W pierwszym etapie prowadzimy styczna do wykresu funkcji w jednym w końców przedziału, która przetnie oś X w punkcie x_0 .

$$x_0 = x_p - \frac{\varepsilon}{\frac{f(x_p + \varepsilon)}{f(x_p)} - 1}$$

2. Obliczamy wartość funkcji w punkcie x_0 i sprawdzamy, czy spełnia warunek:

$$|f(x_0)| < \varepsilon$$

3. Jeżeli spełnia warunek, to x_0 jest naszym miejscem zerowym z zadana dokładnością.
4. W przeciwnym razie prowadzimy styczna do wykresu funkcji w punkcie x_0 i kontynuujemy procedurę aż do znalezienia pierwiastka z zadana dokładnością.

Metoda siecznych – schemat blokowy

Dane wejściowe:

$f(x)$ – funkcja, której pierwiastek liczymy

x_0 – punkt startowy

$f_p(x)$ – pierwsza pochodna funkcji $f(x)$

Dane wyjściowe:

x_0 – pierwiastek funkcji $f(x)$

Zmienne pomocnicze:

ε_x – określa dokładność porównania z zerem

ε_0 – określa dokładność wyznaczania pierwiastka x_0

x_1 – poprzednie przybliżenie pierwiastka

