Algebra macierzy

Definicja macierzy

- Macierzą wymiaru $m \times n$, gdzie $m, n \in N$, o elementach ze zbioru R nazywamy prostokątną tablicę o m wierszach i n kolumnach złożoną z $m \cdot n$ elementów zbioru R postaci:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$a_{ij} \in \mathcal{R}$ – element macierzy A

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ lub $A = [a_{ij}]$ – macierz o wymiarach $m \times n$

m – liczba wierszy macierzy

n – liczba kolumn macierzy

Macierze

- Wektor kolumnowy: $$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}$$

- Wektor wierszowy: $$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$$

- Macierz kwadratowa – $m = n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{nn}$ – przekątna główna macierzy A

Macierze

- Macierz zerowa, 0 lub $0_{m\times n}$:

$$0_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

- Macierz jednostkowa, I lub E_n :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

- Macierz diagonalna:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$A = diag(a_{11}, a_{22}, a_{33}, \cdots, a_{nn})$$

Macierze

- Macierz skalarna: $A = diag(a, a, \cdots, a)$

- Macierz trójkątna dolna: $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

- Macierz trójkątna górna: $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Działania na macierzach

- ***Równość macierzy***:

  $A = B \quad \Leftrightarrow$ gdy mają jednakowe wymiary i odpowiednie elementy są równe.

- ***Iloczynem macierzy*** $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ ***przez skalar*** α nazywamy macierz

$$B = [b_{ij}]_{m\times n} = [\alpha \cdot a_{ij}] = \alpha A.$$

- $(-1) \cdot A -$ ***macierzą przeciwną*** do macierzy A i oznaczamy przez –A.

- ***Suma macierzy*** $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ i $B = [b_{ij}]_{m\times n}$

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$$

- ***Różnica macierzy*** $A - B = [a_{ij} - b_{ij}]_{m\times n}$

Działania na macierzach

- $A + B = B + A$ (prawo przemienności dodawania)
- $(A + B) + C = A + (B + C)$ (prawo łączności dodawania)
- $A + O = O + A = A$
- $A + (-A) = O$

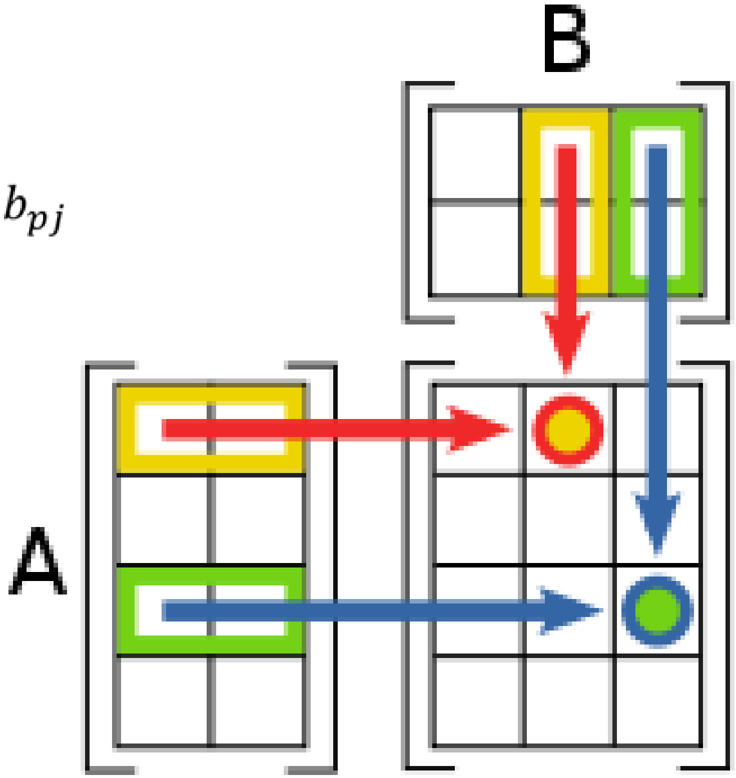
- $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
- $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$
- $(\alpha \beta)A = \alpha (\beta A)$
- $\alpha A = A \alpha$

Działania na macierzach

- ***Iloczynem macierzy*** $A = [a_{ij}]_{m\times k}$ ***przez macierz*** $B = [b_{ij}]_{k\times n}$ nazywamy macierz $C = A\cdot B = [c_{ij}]_{m\times n}$

$$c_{ij} = \sum_{p=1}^{k} a_{ip} b_{pj}$$

- $$\frac{\textit{liczba kolumn}}{\textit{pierwszej macierzy}} = \frac{\textit{liczba wierszy}}{\textit{drugiej macierzy}}$$



Działania na macierzach

- $\mathbf{A \cdot B \neq B \cdot A}$
- $\mathbf{(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)}$ (prawo łączności mnożenia)
- $\mathbf{I \cdot A = A \cdot I = A}$

- $\mathbf{A \cdot (B + C) = AB + A\,C}$ (prawo rozdzielności)
- $\mathbf{(A + B) \cdot C = AC + B\,C}$ (prawo rozdzielności)

Transpozycja macierzy i jej własności

- ***Macierzą transponowaną*** do prostokątnej macierzy

$$A = [a_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(K)$$

nazywamy macierz prostokątną

$$A^T = [b_{ij}]_{m\times n} \in M_{m\times n}(K)$$

gdzie

$$b_{ij} = a_{ji}$$

dla $i = 1, 2, \cdots, m \quad j = 1, 2, \cdots, n$

- Macierz kwadratową $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ stopnia n, której wszystkie elementy spełniają warunek $a_{ij} = a_{ji}$ dla $i = 1, 2, \cdots, n$ tzn.

$$A^T = A$$

nazywamy **macierzą symetryczną**.

Odwracanie macierzy

- Macierz $\boldsymbol{A}^{-1}$ jest **macierzą odwrotną do kwadratowej macierzy** A, jeśli

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$$

  $\boldsymbol{I}$ – macierz jednostkowa.

- Jeżeli wyznacznik macierzy A jest **różny od zera**, to istnieje jednoznacznie określona macierz odwrotna do niej.
  Jest to warunek konieczny i wystarczający istnienia macierzy odwrotnej.

Tworzenie macierzy

Wprowadzanie macierzy z linii poleceń

- Pojedyncza liczba (skalar): a=1.27
- Wektor wierszowy: a=[1 2 3]
- Wektor kolumnowy: a=[1; 2; 3] (średnik oznacza przejście do następnego wiersza)
- Macierz:
  - (kolejno wierszami): a=[1 2 3; 4 5 6; 7 8 9]
  - można też tak:

    a=[1 2 3
    4 5 6
    7 8 9]

w rezultacie otrzymamy to samo

Wprowadzanie macierzy – c.d.

- Szybkie tworzenie wektorów:
  - a=1 :10

    a=

    1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
  - a=0:2 :10

    a=

    0 2 4 6 8 10
  - składnia: ***a = początek : krok : koniec***
- Można też macierze:
  - a=[1 :10;2:2:20]

  (*uwaga na rozmiary wierszy!*)

Indeksowanie macierzy

- Odwołanie się do pojedynczego elementu macierzy: ***a(w,k)***, gdzie w oznacza numer wiersza, a k kolumny
- Przykład:

  a=[1 2 3 4;5 6 7 8; 9 10 11 12]

  a(2,3)

  ans=

  7
- Można też odwołać się do kilku elementów macierzy poprzez wektor indeksów:

  a(2,[1 3])

  ans=

  5 7

Indeksowanie macierzy

- Odwołanie poprzez zakres:

  a(2,2:4)

  ans=

  6 7 8

- Można indeksować wszystkie kolumny czy wiersze:

  a(2,:)

  ans=

  5 6 7 8

  a(:,2:4)

  ans=

  2 3 4

  6 7 8

  10 11 12

Działania na macierzach

Modyfikacja macierzy poprzez indeksowanie

- Modyfikacja elementu macierzy:

  a(1,2)=1

  ans=

  1 1 3 4

  5 6 7 8

  9 10 11 12

- Modyfikacja wiersza (kolumny) macierzy:

  a(2,:)=1:4

  ans=

  1 1 3 4

  1 2 3 4

  9 10 11 12

Modyfikacja macierzy poprzez indeksowanie

- Redukcja macierzy:

  a(:,4)=[]

  ans=

  1 1 3

  1 2 3

  9 10 11

- Permutacja macierzy:

  b=a(:,[2 3 1])

  b=

  1 3 1

  2 3 1

  10 11 9

Modyfikacja macierzy – funkcje specjalne

- ***fliplr(a)*** – odbicie lustrzane w poziomie (lr=left-right)
- ***flipud(a)*** – odbicie lustrzane w pionie (ud=up-down)
- ***rot90(a)*** – obrót o 90 stopni (odwrotnie do ruchu wskazówek zegara)
- ***tril(a)*** – ekstrakcja macierzy trójkątnej dolnej (l=lower)
- ***triu(a)*** – ekstrakcja macierzy trójkątnej górnej (u=upper)
- ***diag(a)*** – ekstrakcja elementów diagonalnych macierzy
- ***a'*** – utworzenie macierzy transponowanej
- ***inv(a)*** – utworzenie macierzy odwrotnej = a^{-1}

Tworzenie macierzy specjalnych

- Tworzenie macierzy zer: ***zeros(w,k)*** – w, k oznaczają odpowiednio liczbę wierszy i kolumn (podanie tylko jednej liczby tworzy macierz kwadratową)
- Tworzenie macierzy jedynek: ***ones(w,k)***
- Tworzenie macierzy jednostkowej: ***eye(n)***
- Tworzenie macierzy o rozkładzie losowym równomiernym: ***rand(w,k)***
- Tworzenie macierzy o rozkładzie losowym normalnym: ***randn(w,k)***

Operacje macierzowe

- Dodawanie i odejmowanie macierzowe:
  - macierz-macierz: ***a+b*** oraz ***a-b*** (macierze muszą mieć te same wymiary)
  - macierz-skalar: skalar dodawany do (odejmowany od) każdego elementu macierzy
- Mnożenie macierzowe:
  - macierz-macierz: ***a*b*** (wewnętrzne wymiary macierzy muszą być równe)
  - macierz-skalar: skalar przemnaża każdy element macierzy
- Dzielenie macierzowe:
  - dzielenie prawostronne: ***a/b*** tożsame z ***a*inv(b***)
  - dzielenie lewostronne: ***a\b*** tożsame z ***inv(a)*b***

Operacje macierzowe

- Potęgowanie: ***a^b*** (jeden element musi być skalarem, a drugi macierzą kwadratową):
  - jeśli b jest liczbą całkowitą, to macierz a jest b-krotnie przemnażana przez siebie
  - jeśli a jest skalarem, a macierz b jest diagonalna, to wynikiem jest macierz diagonalna z elementami równymi liczbie a podniesionej do potęgi wartości odpowiedniego elementu macierzy b
  - w pozostałych przypadkach operacja potęgowania dokonywana jest w przestrzeni wektorowej, w której składnik macierzowy jest diagonalny (rozwiązywane jest zagadnienie wartości i wektorów własnych: A=VDV–1) – wynik podawany jest jednak w przestrzeni pierwotnej: AB=VDBV–1

Operacje tablicowe

- Odróżnia się je od operacji macierzowych poprzez poprzedzenie ich kropką: **.*   ./   .\   .^**
- Wykonywane są pomiędzy odpowiednimi elementami macierzy (element po elemencie)
- Macierze muszą mieć te same wymiary (za wyjątkiem oczywiście operacji na parze macierz-skalar)
- Dodawanie i odejmowanie tablicowe nie wymaga kropki, bo działa tak samo, jak w operacjach macierzowych
- W przypadku, gdy mogło by to doprowadzić do niejednoznacznej interpretacji polecenia, przed kropką należy postawić spację: 2 .^a

Operacje relacyjne i logiczne

- Operacje na macierzach o tych samych wymiarach lub pomiędzy macierzą a skalarem – wynikiem jest macierz tych samych wymiarów, której elementami są wartości logiczne (0 lub 1) wyniku operacji na odpowiednich elementach macierzy

- Operatory relacyjne:

  == równości

  ~= nierówności

  < mniejszości

  <= niewiększości

  > większości

  >= niemniejszości

- Operatory logiczne:

  & logiczne And

  | logiczne Or

  ~ logiczne Not

- Elementy niezerowe macierzy traktowane są jak 1 (prawda)

Funkcje macierzowe

- ***det(a)*** – wyznacznik macierzy
- ***trace(a)*** – ślad macierzy (suma elementów diagonalnych)
- ***rank(a)*** – rząd macierzy
- ***eig(a)*** – wartości własne i wektory własne macierzy
  - ***d=eig(a)***

    d jest wektorem (kolumną) wartości własnych
  - ***[V,D]=eig(A)***

    V jest macierzą wektorów własnych (kolumny)

    D jest macierzą diagonalną wartości własnych
  - $A=VDV^{-1}$

Elementarne funkcje statystyczne

- Działają na seriach danych wzdłuż kolumn (standardowo) lub wierszy (trzeba to wymusić, np. min(a,2))
- Wynikiem jest wektor o długości równej liczbie kolumn (wierszy) z elementami będącymi wartościami funkcji obliczonych na kolumnach (wierszach)
  - ***min(a)*** element minimalny
  - ***max(a)*** element maksymalny
  - ***sum(a)*** suma elementów
  - ***prod(a)*** iloczyn elementów
  - ***mean(a)*** średnia
  - ***std(a)*** odchylenie standardowe
  - ***var(a)*** wariancja

Elementarne funkcje tablicowe

- Działają tablicowo, tzn. na elementach macierzy:
  - ***abs(a)*** wartość bezwzględna
  - ***round(a)*** zaokrąglenie
  - ***fix(a)*** zaokrąglenie do 0
  - ***floor(a)*** zaokrąglenie do $-\infty$
  - ***ceil(a)*** zaokrąglenie do $+\infty$
  - ***sqrt(a)*** pierwiastek kwadratowy
  - ***rem(a)*** reszta z dzielenia
  - ***exp(a)*** funkcja wykładnicza
  - ***log(a)*** logarytm naturalny
  - ***log10(a)*** logarytm dziesiętny

Funkcje trygonometryczne i cyklomeryczne

- Działają na elementach macierzy (tablicowo)
- Argumentem (lub wynikiem) funkcji jest miara łukowa

- Funkcje trygonometryczne:
  - ***sin(a)*** sinus
  - ***cos(a)*** cosinus
  - ***tan(a)*** tangens
  - ***cot(a)*** cotangens

- Funkcje cyklometryczne:
  - ***asin(a)*** arcus sinus
  - ***acos(a)*** arcus cosinus
  - ***atan(a)*** arcus tangens
  - ***acot(a)*** arcus cotangens

- Odpowiedniki hiperboliczne tych funkcji mają w nazwie dodatkowo literę h na końcu, np. ***sinh***, ***acoth***