

Zestaw 5A

Zadanie 1

Obliczenie n -tej potęgi liczby $a \in \mathbb{N}$ możemy zadać relacją rekurencyjną

$$\begin{cases} T(n) = aT(n-1) \\ T(0) = 1 \end{cases}$$

Proszę:

- I. Wykonać iterację idąc od $T(n)$ (w dół) oraz idąc od $T(0)$ (w górę);
- II. Zapostulować rozwiązanie $T(n)$;
- III. Narysować drzewo wywołań;
- IV. Na podstawie drzewa obliczyć ile razy wywołana zostanie funkcja $T(n)$;
- V. Proszę sprawdzić, że liczba wywołań $K(n)$ wynosi

$$K(n) = \sum_{v=0}^n a^v$$

- VI. Proszę sprawdzić, że liczba wywołań rekurencyjnych $K(n)$ jest rozwiązaniem równania rekurencyjnego

$$K(n) = aK(n-1) + 1$$

Zadanie 2

Proszę wykonać iterację następujących relacji rekurencyjnych, a następnie zapostulować rozwiązanie

- a) $T(n) = 2T(n-1) + 3^{n-1}$, $T(1) = 0.5$ c) $T(n) = \frac{n-1}{n}T(n-1) + 4$, $T(1) = \alpha$,
b) $T(n) = nT(n-1) + 2^{n-1}n!$, $T(0) = 1$, d) $T(n) = n^\alpha T(n-1) + n^\beta$, $T(0) = c$.

Zadanie 3

Równanie rekurencyjne

$$T(n) = aT(n/b) + g(n) \quad \text{lub} \quad T(n) = aT(n-b) + g(n)$$

można interpretować następująco: *aby rozwiązać problem o wielkości n należy rozwiązać a problemów o wielkości (n/b) lub $(n-b)$ oraz dodatkową jednostkę pracy $g(n)$.*

Wykorzystując tę wiadomość proszę narysować drzewo rekursji dla poniższych relacji

a) $T(n) = rT(n-1)$

c) $T(n) = aT(n/b)$

b) $T(n) = 8T(n/4)$

d) $T(n) = T(n/3) + T(2n/3)$

Następnie, przyjmując że praca wykonywana na elemencie o rozmiarze n wynosi $f(n) = n$ oraz $T(1) = \alpha$ znaleźć całkowitą pracę wykonaną w trakcie rekurencji.

Zadanie 4

Rozważmy równanie rekurencyjne

$$\begin{cases} T(n) = 5T(n-1) + f(n) \\ T(0) = \alpha \end{cases}$$

Dla następujących funkcji $f(n)$:

I. $f(n) = n$;

III. $f(n) = 3^n$;

II. $f(n) = n^2$;

IV. $f(n) = 5^n$;

proszę znaleźć rozwiązanie rekurencji. Czy wkład rekurencyjny przeważa nad wkładem od pracy dodatkowej?

Zadanie 5

Proszę przeanalizować następujące równania rekurencyjne

a) $T(n) = T(n/2) + n$, b) $T(n) = 2T(n/2) + n$, c) $T(n) = 3T(n/2) + n$

zakładając $T(1) = a$