Papiery wartościowe o stałym dochodzie

Inwestycje i teoria portfela

Wartość pieniądza . . .
Kapitalizacja prosta
Kapitalizacja złożona
Kapitalizacja ciągła
Wartość pieniądza . . .
Wycena ciągu . . .
Wycena obligacji
Zależność . . .

1. Wartość pieniądza w czasie

Złotówka dzisiaj (którą mamy w ręku) jest więcej warta niż (przyrzeczona) złotówka w przyszłości, bo

— możemy zainwestować te pieniądze, (chociażby w banku) i zainkasować odsetki, czyli powiększyć kapitał początkowy,

— siła nabywcza naszych pieniędzy zmnienia się w czasie ze względu na inflację,

— przyszłe wpływy pieniężne są niepewne.

Wartość pieniądza . . .
Kapitalizacja prosta
Kapitalizacja złożona
Kapitalizacja ciągła
Wartość pieniądza . . .
Wycena ciągu . . .
Wycena obligacji
Zależność . . .

2. Kapitalizacja prosta

Lokujemy w banku kwotę PV na procent $r > 0$
zatem uzyskujemy rPV odsetek
kapitalizacja prosta oznacza, że odsetki nie są dopisywane do kapitału

przyszła wartość po czasie T (liczonym w latach) wyniesie

$$FV = PV(1 + rT) \tag{1}$$

wartość dzisiejsza

$$PV = \frac{1}{1 + rT} FV = (1 + rT)^{-1} FV \tag{2}$$

Mając dane PV, FV oraz T możemy wyliczyć r

$$rT = \frac{FV - PV}{PV}$$

czyli procentowy przyrost wartości dzisiejszej
stopa zwrotu w skali roku (przeskalowanie czasu)

$$r = \frac{1}{T} \frac{FV - PV}{PV} \tag{3}$$

3. Kapitalizacja złożona

wartości przyszłe FV po T latach
gdy $m = 1$,

$$FV = PV(1 + r)^T$$

gdy $m = 2$,

$$FV = PV(1 + \frac{r}{2})^{2T}$$

dla dowolnego m

$$FV = PV(1 + \frac{r}{m})^{mT}$$

Wartość pieniądza . . .
Kapitalizacja prosta
Kapitalizacja złożona
Kapitalizacja ciągła
Wartość pieniądza . . .
Wycena ciągu . . .
Wycena obligacji
Zależność . . .

czynnik stopy procentowej

$$\left(1+\frac{r}{m}\right)^m$$

wartość przyszła naszej inwestycji zależy od częstotliwości kapitalizacji

potrzeba porównania efektywności inwestycji przy różnych metodach kapitalizacji

efektywna stopa procentowa r_e równoważna stopa procentowa, gdyby kapitalizacja następowała tylko raz w roku

$$1+r_e=\left(1+\frac{r}{m}\right)^m$$

czyli

$$r_e=\left(1+\frac{r}{m}\right)^m-1$$

Wartość pieniądza . . .
Kapitalizacja prosta
Kapitalizacja złożona
Kapitalizacja ciągła
Wartość pieniądza . . .
Wycena ciągu . . .
Wycena obligacji
Zależność . . .

za T lat dostaniemy kwotę FV
jaka jest wartość dzisiejsza PV kwoty FV za T lat?
mamy daną stopę procentową r

$$PV = FV(1+r)^{-T}, \tag{4}$$

T-letni czynnik dyskontowy

$$d_T = (1+r)^{-T} \tag{5}$$

dyskontowanie ma miejsce m razy w ciągu roku, wtedy

$$PV = FV\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-mT} \tag{6}$$

i wtedy czynnik dyskontowy

$$d_{mT} = \left(1+\frac{r}{m}\right)^{-mT}$$

Wartość pieniądza . . .
Kapitalizacja prosta
Kapitalizacja złożona
Kapitalizacja ciągła
Wartość pieniądza . . .
Wycena ciągu . . .
Wycena obligacji
Zależność . . .

4. Kapitalizacja ciągła

odsetki są dopisywane m-krotnie w ciągu roku
wtedy wartość przyszła FV kwoty PV po czasie t jest dana

$$FV = PV\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}$$

po przekształceniu

$$FV = PV\left(\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{r}}\right)^{rt} = PV\left(\left(1+\frac{1}{\frac{m}{r}}\right)^{\frac{m}{r}}\right)^{rt}$$

korzystamy z faktu, że

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{m}{r}}\right)^{\frac{m}{r}} = e$$

uzyskamy

$$FV = PV\mathrm{e}^{rt} \tag{7}$$

stopa efektywna

$$r_e = e^r - 1$$

wartość dzisiejsza

$$PV = FV\mathrm{e}^{-rT} \tag{8}$$

5. Wartość pieniądza w czasie – ciąg płatności

wypłaty raz do roku, w równej wysokości C, przy czym pierwsza wypłata ma miejsce za rok od dzisiaj
stopa procentowa r
Aby wyznaczyć wartość dzisiejszą takiej renty wieczystej PV_1 musimy zdyskontowac wszystkie płatności na dzień dzisiejszy

$$PV_1 = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \frac{C}{(1+r)^3} + \cdots$$

Widzimy, że jest to nieskończony ciąg geometryczny. Sumę takiego ciągu możemy wyznaczyć ze wzoru

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}, \quad \text{przy założeniu} \ \mid q \mid < 1$$

gdzie w naszym przypadku $a = \frac{C}{1+r}$, $q = \frac{1}{1+r}$. Zatem

$$PV_1 = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \frac{C}{(1+r)^3} + \cdots = \frac{C}{1+r}\frac{1}{1-\frac{1}{1+r}} = \frac{C}{r} \quad (9)$$

Wartość pieniądza . . .
Kapitalizacja prosta
Kapitalizacja złożona
Kapitalizacja ciągła
Wartość pieniądza . . .
Wycena ciągu . . .
Wycena obligacji
Zależność . . .

skończony strumień przepływów gotówkowych
pierwsza płatność następuje po $T+1$ latach
wartość dzisiejszą PV_{T+1} takiej renty $\frac{C}{r}$ musimy zdyskontować na dziś, co daje

$$PV_{T+1} = \frac{C}{r(1+r)^T}.$$

Wartość dzisiejszą renty okresowej składającej się z T płatności, przy czym pierwsza jest płatna za rok:

$$PV = \sum_{i=1}^{n} \frac{C}{(1+r)^i} = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{C}{(1+r)^T}$$

obliczamy jako różnicę dwóch rent wieczystych

$$PV_1 - PV_{T+1} = \frac{C}{r} - \frac{1}{r(1+r)^T} = \frac{C}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^T}\right) = C \cdot PVA(r,T),$$

gdzie

$$PVA(r,T) = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^T}\right)$$

oznacza czynnik renty okresowej.

Wartość pieniądza . . .
Kapitalizacja prosta
Kapitalizacja złożona
Kapitalizacja ciągła
Wartość pieniądza . . .
Wycena ciągu . . .
Wycena obligacji
Zależność . . .

Jeśli mamy m płatności w roku w wysokości C/m każda,
to wartość dzisiejsza renty okresowej składającej się z n płatności (gdzie $n = m \cdot T$, T liczba lat) będzie wyrażona zależnością

$$PV = \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{C}{m}}{(1+\frac{r}{m})^i} = \frac{\frac{C}{m}}{1+\frac{r}{m}} + \frac{\frac{C}{m}}{(1+\frac{r}{m})^2} + \cdots + \frac{\frac{C}{m}}{(1+\frac{r}{m})^n}$$

Wartość pieniądza ...
Kapitalizacja prosta
Kapitalizacja złożona
Kapitalizacja ciągła
Wartość pieniądza ...
Wycena ciągu ...
Wycena obligacji
Zależność ...

6. Wycena ciągu płatności (wartość obligacji)

Obligacja kuponowa = skończony ciąg strumienia płatności

$$\begin{aligned} &\text{wartość obecna strumienia płatności} \\ &= \text{wartość dzisiejsza kuponów} + \text{wartość dzisiejsza nominału} \end{aligned}$$

mamy daną stopę procentową dyskontującą te przepływy r
wtedy wartość obligacji P (wartość dzisiejsza strumienia płatności w przyszłości)

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i/m}{(1+r/m)^i} + \frac{F}{(1+r/m)^n} \tag{10}$$

n - liczba okresów odsetkowych (liczba lat T "życia obligacji" $\times$ liczba płatności kuponowych w roku m),
F - wartość nominalna obligacji (*par value*),
C_i/m - wysokość kuponu ($c_i/m \cdot F$) w i-tym okresie odsetkowym,
c_i/m - oprocentowanie obligacji w i-tym okresie odsetkowym,
i - chwile, w których następują płatności,
r - stopa procentowa dyskontująca przepływy.

Wartość pieniądza . . .
Kapitalizacja prosta
Kapitalizacja złożona
Kapitalizacja ciągła
Wartość pieniądza . . .
Wycena ciągu . . .
Wycena obligacji
Zależność . . .

Strona główna
Strona tytułowa
Strona 11 z 42
Powrót
Pełny ekran
Zamknij
Koniec

w szczególności dla obligacji o stałym kuponie $C_i/m = C/m$ dla każdego i-tego okresu odsetkowego

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{C/m}{(1+r/m)^i} + \frac{F}{(1+r/m)^n} \tag{11}$$

przykład

T=3, F=100 zł, $c = 8\%$ p.a., $m = 1$.
stopa procentowa dyskontująca przepływy wynosi 6% p.a.
Wtedy wartość obligacji wynosi

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=1}^{3} \frac{C/m}{(1+r/m)^i} + \frac{F}{(1+r/m)^3} \\ &= \frac{8}{1+0{,}06} + \frac{8}{(1+0{,}06)^2} + \frac{108}{(1+0{,}06)^3} \\ &= 105,35 \end{aligned}$$

Wartość pieniądza . . .
Kapitalizacja prosta
Kapitalizacja złożona
Kapitalizacja ciągła
Wartość pieniądza . . .
Wycena ciągu . . .
Wycena obligacji
Zależność . . .

teraz m=2,
liczba okresów odsetkowych wzrośnie 2 razy,
wysokość kuponu C/m=4 zł, a wartość obligacji wyniesie

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=1}^{6} \frac{C/m}{(1+r/m)^i} + \frac{F}{(1+r/m)^6} \\ &= \frac{4}{1+0{,}03} + \frac{4}{(1+0{,}03)^2} + \cdots + \frac{4}{(1+0{,}03)^5} + \frac{104}{(1+0{,}03)^6} \\ &= 105{,}42 \end{aligned}$$

częstsze wypłacanie kuponów to wartość obligacji jest wyższa.

Wartość pieniądza ...
Kapitalizacja prosta
Kapitalizacja złożona
Kapitalizacja ciągła
Wartość pieniądza ...
Wycena ciągu ...
Wycena obligacji
Zależność ...

zmieniamy stopę procentową dyskontującą przepływy pieniężne

przykład

T=3, F=100 zł, $c = 8\%$ p.a., $m = 1$.

stopa procentowa dyskontująca przepływy wynosi 8% p.a.

Wtedy wartość naszej obligacji wynosi

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{8}{1+0{,}08} + \frac{8}{(1+0{,}08)^2} + \frac{108}{(1+0{,}08)^3} \\
&= \frac{8}{1+0{,}08} + \frac{8}{(1+0{,}08)^2} + \frac{108}{(1+0{,}08)(1+0{,}08)^2} \\
&= \frac{8}{1+0{,}08} + \frac{8}{(1+0{,}08)^2} + \frac{100}{(1+0{,}08)^2} \\
&= \frac{8}{1+0{,}08} + \frac{108}{(1+0{,}08)^2} \\
&= \frac{108}{1+0{,}08} \\
&= 100{,}00
\end{aligned}
$$

gdy $r = c$, to wartość takiej obligacji jest równa wartości nominalnej

Wartość pieniądza . . .
Kapitalizacja prosta
Kapitalizacja złożona
Kapitalizacja ciągła
Wartość pieniądza . . .
Wycena ciągu . . .
Wycena obligacji
Zależność . . .

Strona główna
Strona tytułowa
Strona 14 z 42
Powrót
Pełny ekran
Zamknij
Koniec

Załóżmy teraz, że stopa procentowa dyskontująca przepływy wynosi 10% w skali roku. Wtedy wartość naszej obligacji wynosi

$$
\begin{aligned}
P &= \sum_{i=1}^{3} \frac{C/m}{(1+r/m)^i} + \frac{F}{(1+r/m)^3} \\
&= \frac{8}{1+0{,}1} + \frac{8}{(1+0{,}1)^2} + \frac{108}{(1+0{,}1)^3} \\
&= 95{,}62
\end{aligned}
$$

Wartość pieniądza . . .
Kapitalizacja prosta
Kapitalizacja złożona
Kapitalizacja ciągła
Wartość pieniądza . . .
Wycena ciągu . . .
Wycena obligacji
Zależność . . .

obserwacja

$$
\begin{aligned}
(\text{oprocentowanie obligacji} < r) &\iff (\text{wartość obligacji} < F)\\
(\text{oprocentowanie obligacji} = r) &\iff (\text{wartość obligacji} = F)\\
(\text{oprocentowanie obligacji} > r) &\iff (\text{wartość obligacji} > F)
\end{aligned}
$$

Wartość pieniądza . . .
Kapitalizacja prosta
Kapitalizacja złożona
Kapitalizacja ciągła
Wartość pieniądza . . .
Wycena ciągu . . .
Wycena obligacji
Zależność . . .

teraz wyceniamy obligację w dowolnej chwili okresu odsetkowego

przykład

F=100 zł, $c = 8\%$ p.a., $m = 1$.

stopa procentowa dyskontująca przepływy wynosi $r = 6\%$ p.a.

wyceniamy obligację na 2 lata i 3 miesiące przed terminem wykupu, czyli na 3 miesiące przed końcem pierwszego okresu odsetkowego

Pierwszy kupon – dyskontowany czynnikiem $(1 + 0{,}06)^{0{,}25}$,

bo cały okres odsetkowy to 12 miesięcy, a mamy 3 miesiące do wypłaty pierwszego kuponu. Zatem czas do wypłaty pierwszego kuponu wynosi $3/12 = 0{,}25$. Wtedy wartość obligacji wyniesie

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=0{,}25}^{2{,}25} \frac{C/m}{(1 + r/m)^i} + \frac{F}{(1 + r/m)^{2{,}25}} \\ &= \frac{8}{(1 + 0{,}06)^{0{,}25}} + \frac{8}{(1 + 0{,}06)^{1{,}25}} + \frac{108}{(1 + 0{,}06)^{2{,}25}} \\ &= 110{,}05 \end{aligned}$$

Wartość pieniądza . . .
Kapitalizacja prosta
Kapitalizacja złożona
Kapitalizacja ciągła
Wartość pieniądza . . .
Wycena ciągu . . .
Wycena obligacji
Zależność . . .

Niech teraz odsetki będą wypłacane co pół roku, czyli $m=2$. Mamy zatem 6 okresów odsetkowych, jednak pierwszy kupon już został wypłacony, bo obligacja zapada za 2 lata i 3 miesiące. Zatem jesteśmy w połowie drugiego okresu odsetkowego i drugi kupon będzie dyskontowany czynnikiem $(1+0{,}03)^{0{,}5}$. Stąd wartość obligacji

$$
\begin{aligned}
P &= \sum_{i=0{,}5}^{4{,}5} \frac{C/m}{(1+r/m)^i} + \frac{F}{(1+r/m)^{4{,}5}} \\
&= \frac{4}{(1+0{,}03)^{0{,}5}} + \frac{4}{(1+0{,}03)^{1{,}5}} + \cdots + \frac{4}{(1+0{,}03)^{3{,}5}} + \frac{104}{(1+0{,}03)^{4{,}5}} \\
&= 106{,}14
\end{aligned}
$$

Wartość pieniądza . . .
Kapitalizacja prosta
Kapitalizacja złożona
Kapitalizacja ciągła
Wartość pieniądza . . .
Wycena ciągu . . .
Wycena obligacji
Zależność . . .

Czyli ogólnie możemy zapisać:
jeśli długość odcinka czasowego do najbliższej płatności jest mniejsza niż długość okresu odsetkowego to wartość obligacji wyrazimy następująco

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i/m}{(1+\frac{r}{m})^{\nu}(1+\frac{r}{m})^{i-1}} + \frac{F}{(1+\frac{r}{m})^{\nu}(1+\frac{r}{m})^{n-1}} \tag{12}$$

gdzie

$$\nu = \frac{\text{liczba dni do najbliższego kuponu}}{\text{liczba dni w okresie odsetkowym}} \tag{13}$$

Wartość pieniądza . . .
Kapitalizacja prosta
Kapitalizacja złożona
Kapitalizacja ciągła
Wartość pieniądza . . .
Wycena ciągu . . .
Wycena obligacji
Zależność . . .

Strona główna
Strona tytułowa
Strona 19 z 42
Powrót
Pełny ekran
Zamknij
Koniec

Na taki ciąg płatności odsetek w obligacji o stałych kuponach możemy patrzeć jak na rentę okresową o płatnościach C/m. Zatem możemy napisać

$$\text{wartość obecna strumienia płatności} \\ = \\ \text{wartość dzisiejsza renty okresowej} \\ + \\ \text{wartość dzisiejsza nominału}$$

Wartość pieniądza . . .
Kapitalizacja prosta
Kapitalizacja złożona
Kapitalizacja ciągła
Wartość pieniądza . . .
Wycena ciągu . . .
Wycena obligacji
Zależność . . .

wartość dzisiejszą renty okresowej o płatnościach C/m i stopie procentowej r,

$$PA(r,n) = \frac{C}{r}\left\{1 - \frac{1}{(1+r/m)^n}\right\} \tag{14}$$

Zatem wartość obligacji wynosi

$$P = \frac{C}{r}\left\{1 - \frac{1}{(1+r/m)^n}\right\} + \frac{F}{(1+r/m)^n} \tag{15}$$

postać szczególnie przydatna gdy obliczamy wartość obligacji o długim okresie zapadalności

przykład

T=30 lat, F=100 zł, $c = 8\%$ p.a., $m = 2$,
stopa procentowa dyskontująca przepływy wynosi r=6% p.a.
Wtedy wartość obligacji wynosi

$$\begin{aligned} P &= \frac{8}{0{,}06}\left\{1 - \frac{1}{(1+0{,}06/2)^{60}}\right\} + \frac{100}{(1+0{,}06/2)^{60}} \\ &= 110{,}70 + 16{,}97 \\ &= 127{,}68 \end{aligned}$$

Wartość pieniądza . . .
Kapitalizacja prosta
Kapitalizacja złożona
Kapitalizacja ciągła
Wartość pieniądza . . .
Wycena ciągu . . .
Wycena obligacji
Zależność . . .

W szczególności obligacja 0-kuponowa wyraża się prostą zależnością

$$P = \frac{F}{(1 + r/m)^n} \tag{16}$$

Dla modelu kapitalizacji ciągłej, wartość obligacji

$$P = \sum_{i=1}^{n} C_i/m \cdot \exp(-r \cdot t_i) + F \cdot \exp(-r \cdot t_n) \tag{17}$$

gdzie:
$\exp$ - podstawa logarytmu naturalnego,
t_i - czas do i-tego kuponu, $1 \leqslant i \leqslant n$.

W szczególności, dla obligacji o stałym kuponie $C_i/m = C/m$ mamy

$$P = \sum_{i=1}^{n} C/m \cdot \exp(-r \cdot t_i) + F \cdot \exp(-r \cdot t_n) \tag{18}$$

Wartość pieniądza . . .
Kapitalizacja prosta
Kapitalizacja złożona
Kapitalizacja ciągła
Wartość pieniądza . . .
Wycena ciągu . . .
Wycena obligacji
Zależność . . .
Strona główna
Strona tytułowa
Strona 24 z 42
Powrót
Pełny ekran
Zamknij
Koniec

7. Wycena obligacji

rynek obligacji działa inaczej:

rynek kapitałowy kwotuje (wycenia) tę obligację,
czyli ceny obligacji podaje nam rynek

musimy wyznaczyć wysokość stopy procentowej dyskontującej przepływy pieniężne

problem wyceny obligacji sprowadza się do:

> znalezienia wewnętrznej stopy zwrotu ($internal\ rate\ of\ return$ IRR) sumy takich przepływów gotówkowych,
> czyli **stopy zwrotu w terminie do wykupu** (stopy zwrotu w okresie do wykupu) ($yield\ to\ maturity\ YTM$)

Wartość pieniądza . . .
Kapitalizacja prosta
Kapitalizacja złożona
Kapitalizacja ciągła
Wartość pieniądza . . .
Wycena ciągu . . .
Wycena obligacji
Zależność . . .

$YTM =$

średnia stopa zwrotu uzyskana z inwestycji w obligację kupioną dziś i trzymaną do wykupu przy reinwestowaniu kuponów po stopie YTM

przykład

T=3 lat, F=100 zł, $c = 5\%$ p.a., $m = 1$, P=87,57 zł
stąd YTM =10%
Reinwestujemy kupony po stopie YTM i przy zapadalności mamy

$$5 \cdot (1 + 0{,}1)^2 + 5 \cdot (1 + 0{,}1) + 100 + 5 = 116{,}55 \qquad (19)$$

zatem nasza inwestycja generuje roczną stopę zwrotu y taką, że

$$116{,}55 = 87{,}57 \cdot (1 + y)^3 \qquad (20)$$

czyli

$$y = 10\% \qquad (21)$$

oznaczenie: $y = YTM$

Wartość pieniądza . . .
Kapitalizacja prosta
Kapitalizacja złożona
Kapitalizacja ciągła
Wartość pieniądza . . .
Wycena ciągu . . .
Wycena obligacji
Zależność . . .

wycena obligacji:

$\Rightarrow$ dla modelu dyskretnego

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i/m}{(1+y/m)^i} + \frac{F}{(1+y/m)^n} \tag{22}$$

$\Rightarrow$ dla modelu ciągłego

$$P = \sum_{i=1}^{n} C_i/m \cdot \exp(-y \cdot t_i) + F \cdot \exp(-y \cdot t_n) \tag{23}$$

rynek kwotuje cenę czystą (cenę w gazecie)
czyli bez narosłych odsetek najbliższego kuponu

$$\text{cena brudna} = \text{cena czysta} + \text{narosłe odsetki}$$

Wartość pieniądza . . .
Kapitalizacja prosta
Kapitalizacja złożona
Kapitalizacja ciągła
Wartość pieniądza . . .
Wycena ciągu . . .
Wycena obligacji
Zależność . . .

$$\text{narosłe odsetki} = \frac{\text{liczba dni od ostatniego kuponu}}{\text{liczba dni w okresie odsetkowym}} \times \text{wielkość kuponu}$$

czyli

$$\text{narosłe odsetki} = (1-\nu)\frac{C}{m}F$$

$YTM =$ stopa zwrotu w terminie do wykupu dla ceny brudnej obligacji.

przykładowe kwotowania obligacji skarbowych na polskim rynku międzybankowym w arkuszu

Policzmy stopę zwrotu w terminie do wykupu YTM przykładowej obligacji kwotowanej na polskim rynku

Wartość pieniądza . . .
Kapitalizacja prosta
Kapitalizacja złożona
Kapitalizacja ciągła
Wartość pieniądza . . .
Wycena ciągu . . .
Wycena obligacji
Zależność . . .

Uwaga dotyczy **podstawy naliczania odsetek**
(*day account* lub *day basis*)

Gdy znane są termin wykupu obligacji i termin wyceny, to różnica między nimi określa dokładny horyzont czasowy inwestycji. Metoda określania długości czasu między tymi terminami znana jest jako podstawa naliczania odsetek.

Najczęściej stosowane konwencje to:

⇒ **Actual/Actual**

rzeczywista liczba dni w okresie inwestycji w stosunku do rzeczywistej liczby dni w roku (365 dni) lub (366 dni dla roku przestępnego),

⇒ **Actual/365**

rzeczywista liczba dni w okresie inwestycji w stosunku do 365 dni w roku bez względu na to, czy rok jest przestępny,

⇒ **30/360**

zakłada się, że każdy miesiąc kalendarzowy ma 30, a rok 360 dni bez względu na rzeczywistą ich liczbę.

przykład

Obligacja wypłaca kupony co pół roku ($m=2$) w dniach:
7 kwietnia i 7 października
Mamy dokonać wyceny obligacji na dzień 15 października zakładając, że następny rok nie jest rokiem przestępnym. Aby wycenić obligację, musimy określić jaka część okresu odsetkowego pozostała do następnej płatności kuponowej, jeśli przyjmiemy następujące metody liczenia dni:
a) Actual/Actual
b) 30/360.

Obliczenia przedstawiono w arkuszu.

YTM - metoda przybliżona

Stopę zwrotu w terminie do wykupu nie można wyznaczyć w sposób analityczny w modelu dyskretnym (czyli z zależności (22)) czy też w modelu ciągłym (zależność (23)). Można to zrobić tylko metodą prób i błędów lub w sposób numeryczny.

Istnieje jednak przybliżona formuła pozwalająca szybko oszacować stopę zwrotu w terminie do wykupu YTM. Dana jest ona następująco

$$YTM \approx \left(\frac{C}{m} + \frac{F-P}{n}\right)\frac{3}{F+2P} \tag{24}$$

Wartość pieniądza . . .
Kapitalizacja prosta
Kapitalizacja złożona
Kapitalizacja ciągła
Wartość pieniądza . . .
Wycena ciągu . . .
Wycena obligacji
Zależność . . .

przykład

Rozważmy 5-letnią obligację, o wartości nominlnej F=1000 zł, oprocentowaną w wysokości 10% p.a., płacącą odsetki raz do roku m=1. Jej cena wynosi P=105,912% wartości nominalnej.
Wtedy stopa zwrotu w terminie do wykupu YTM wynosi

$$YTM \approx \left(\frac{100}{1} + \frac{1000 - 1059{,}12}{5}\right)\frac{3}{1000 + 2 \times 1059{,}12} = 8{,}48\%$$

Gdybyśmy policzyli dokładnie YTM to wyniosłaby ona 8,5%.

Wartość pieniądza . . .
Kapitalizacja prosta
Kapitalizacja złożona
Kapitalizacja ciągła
Wartość pieniądza . . .
Wycena ciągu . . .
Wycena obligacji
Zależność . . .

Stopę zwrotu w terminie do wykupu można analitycznie wyznaczyć tylko i wyłącznie dla obligacji 0-kuponowej, z racji tylko jednego przepływu. Dla modelu dyskretnego mamy

$$y = \left(\frac{F}{P}\right)^{1/n} - 1 \tag{25}$$

a dla modelu ciągłego

$$y = \frac{1}{t_n} \ln\left(\frac{F}{P}\right) \tag{26}$$

Wartość pieniądza . . .
Kapitalizacja prosta
Kapitalizacja złożona
Kapitalizacja ciągła
Wartość pieniądza . . .
Wycena ciągu . . .
Wycena obligacji
Zależność . . .

Inne miary stopy zwrotu z obligacji

bieżąca stopa zwrotu (*current yield CY*)

$$\text{bieżąca stopa zwrotu} = \frac{\text{oprocentowanie obligacji w skali roku}}{\text{cena obligacji}} \tag{27}$$

stopa kuponowa (*coupon rate CR*)

$$\text{stopa kuponowa} = \frac{\text{oprocentowanie obligacji w skali roku}}{\text{cena nominalna obligacji}} \tag{28}$$

Wartość pieniądza ...
Kapitalizacja prosta
Kapitalizacja złożona
Kapitalizacja ciągła
Wartość pieniądza ...
Wycena ciągu ...
Wycena obligacji
Zależność ...

jakie są zależności pomiędzy miarami stóp zwrotu z obligacji

przykład

$T = 5$, F=1000 zł, $c = 8\%$ p.a., $m = 2$. Niech cena tej obligacji wynosi P=108,53% wartości nominalnej.

Zatem

$$\begin{aligned} CR &= \frac{80}{1000} = 8{,}00\% \\ CY &= \frac{80}{1085{,}30} = 7{,}37\% \\ YTM &= 6\% \end{aligned}$$

Czyli mamy $YTM < CY < CR$.

Weźmy teraz sytuację, gdy obligacja jest wyceniona przez rynek na poziomie P= 92,28% wartości nominalnej. Wtedy

$$\begin{aligned} CR &= \frac{80}{1000} = 8{,}00\% \\ CY &= \frac{80}{922{,}78} = 8{,}67\% \\ YTM &= 10\% \end{aligned}$$

Czyli mamy $YTM > CY > CR$.

Wartość pieniądza . . .
Kapitalizacja prosta
Kapitalizacja złożona
Kapitalizacja ciągła
Wartość pieniądza . . .
Wycena ciągu . . .
Wycena obligacji
Zależność . . .

Oczywiście, gdy obligacja jest wyceniana przez rynek na poziomie ceny nominalnej to wtedy $YTM = CY = CR$.

YTM portfela obligacji

Stopę zwrotu w terminie do wykupu obliczamy dla portfela obligacji w specyficzny sposób. Należy określić wszystkie przepływy gotówkowe generowane przez każdą z obligacji będącą w portfelu. Taki portfel ma określoną wartość (czyli cenę). YTM portfela to stopa dyskontująca wszystkie te przepływy portfela tak, aby wartość dzisiejsza tych przepływów była równa wartości rynkowej portfela.

$\Rightarrow$ **projekt**

Wartość pieniądza . . .
Kapitalizacja prosta
Kapitalizacja złożona
Kapitalizacja ciągła
Wartość pieniądza . . .
Wycena ciągu . . .
Wycena obligacji
Zależność . . .

Strona główna
Strona tytułowa
Strona 36 z 42
Powrót
Pełny ekran
Zamknij
Koniec

8. Zależność cena–stopa zwrotu w terminie do wykupu obligacji

Pomimo tego, że zależnośc opisująca cenę papieru dłużnego jest skomplikowana, jednak można stosunkowo łatwo określić jakościowe zależności pomiędzy ceną obligacji P, stopą zwrotu w terminie do wykupu YTM, oprocentowaniem obligacji c i czasem do wykupu T. Określenie tych relacji pozwoli lepiej zrozumieć problemy ryzyka stopy procentowej oraz zarządzania portfelem papierów dłużnych.

Możemy ogólnie napisać, że cena papieru dłużnego P jest funkcją trzech zmiennych:

— stopy zwrotu w terminie do wykupu YTM,

— czasu zapadalności obligacji T,

— oprocentowania obligacji c.

Zatem mamy zależność

$$P = \text{funkcja}(YTM, \text{czasu do wykupu}, \%\ \text{obligacji})$$

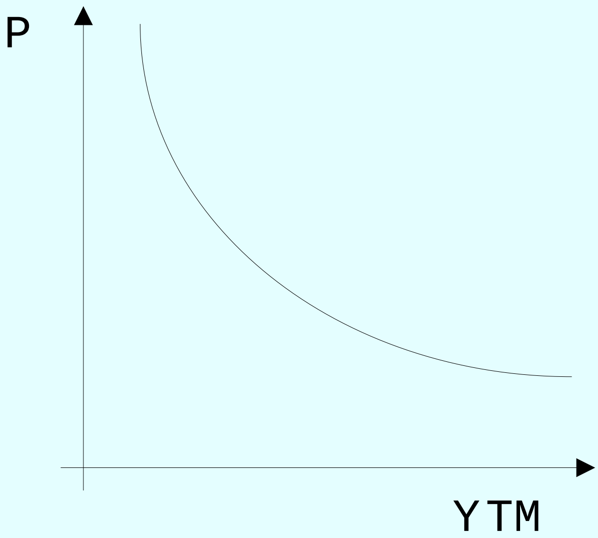
Wartość pieniądza . . .
Kapitalizacja prosta
Kapitalizacja złożona
Kapitalizacja ciągła
Wartość pieniądza . . .
Wycena ciągu . . .
Wycena obligacji
Zależność . . .

1. Cena obligacji a YTM (dla ustalonego czasu do wykupu i oprocentowania obligacji)

$$\text{cena } P \nearrow \iff YTM \searrow$$

$$\text{cena } P \searrow \iff YTM \nearrow$$

krzywa YTM-P jest wypukła.



2. Cena obligacji a YTM i oprocentowanie obligacji c

obligacja z dyskontem

$$(c < YTM) \iff (\text{cena} < \text{wartość nominalna})$$

obligacja po cenie *par*

$$(c = YTM) \iff (\text{cena} = \text{wartość nominalna})$$

obligacja z premią

$$(c > YTM) \iff (\text{cena} > \text{wartość nominalna})$$

Wartość pieniądza . . .
Kapitalizacja prosta
Kapitalizacja złożona
Kapitalizacja ciągła
Wartość pieniądza . . .
Wycena ciągu . . .
Wycena obligacji
Zależność . . .

3. Cena a czas do wykupu (przy ustalonym YTM)

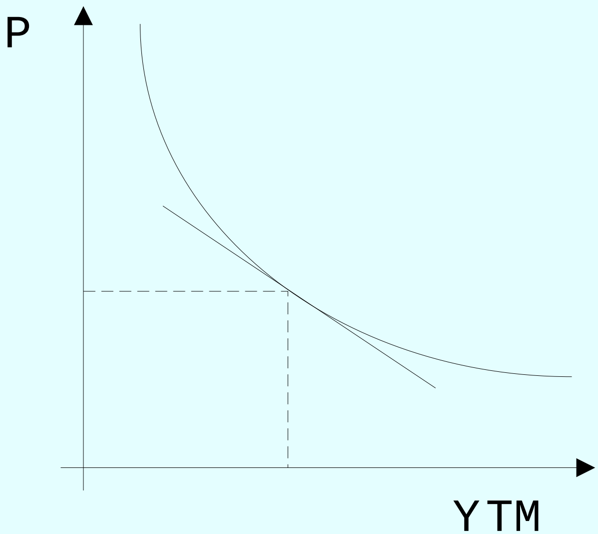
Zmniejszanie się premii i dyskonta w miarę zbliżania się terminu wykupu obligacji. Jeśli dane są dwie obligacje o tym samym oprocentowaniu, tej samej wartości nominalnej i tej samej stopie stopie zwrotu w terminie do wykupu, to obligacja z krótszym terminem wykupu charakteryzyje się mniejszym dyskontem (mniejszą premią odpowiednio). Tą własność obligacji pokazujemy w arkuszu.

Wartość pieniądza . . .
Kapitalizacja prosta
Kapitalizacja złożona
Kapitalizacja ciągła
Wartość pieniądza . . .
Wycena ciągu . . .
Wycena obligacji
Zależność . . .

Strona główna
Strona tytułowa
Strona 40 z 42
Powrót
Pełny ekran
Zamknij
Koniec

4. Własności krzywej YTM-P dla małych zmian YTM
Niewielkie procentowe zmiany YTM implikują niewielkie (w przybliżeniu równe) procentowe zmiany ceny obligacji (bez względu na spadek czy na wzrost YTM).

5. Własności krzywej YTM-P dla dużych zmian YTM
Duże procentowe zmiany YTM implikują duże (nierówne co do kierunku) procentowe zmiany ceny obligacji (przy spadku YTM procentowy wzrost ceny obligacji jest większy, niż przy wzroście YTM procentowy spadek ceny obligacji).



6. Własności krzywej YTM-P (dla ustalonego okresu do wykupu i YTM)

Przy danym okresie do wykupu i danym YTM, im niższe oprocentowanie obligacji tym większa zmienność cen.

7. Własności krzywej YTM-P (dla ustalonego oprocentowania obligacji i YTM)

Przy danym oprocentowaniu obligacji i danym YTM, im dłuższy okres do wykupu tym większa zmienność cen obligacji.

8. Własności krzywej YTM-P (dla ustalonego oprocentowania i czasu do wykupu obligacji)

Przy danym oprocentowaniu i danym czasie do wykupu obligacji, im niższa YTM tym większa zmienność cen obligacji.

Wartość pieniądza . . .
Kapitalizacja prosta
Kapitalizacja złożona
Kapitalizacja ciągła
Wartość pieniądza . . .
Wycena ciągu . . .
Wycena obligacji
Zależność . . .