Ryzyko stopy procentowej

Inwestycje i teoria portfela

1. Ryzyko inwestowania w obligacje

inwestycja w obligacje jest obarczona ryzykiem

trzy podstawowe rodzaje ryzyka związane z inwestowaniem w obligacje:

1. ryzyko niedotrzymania warunków (*default risk*) przez emitenta obligacji,
2. ryzyko zmiany ceny (*risk price*) zwane inaczej ryzykiem okresu posiadania (*holding period risk*),
3. ryzyko reinwestowania (*reinvestment risk*).

Ryzyko niedotrzymania warunków występuje wtedy, gdy emitent obligacji nie dotrzymuje warunków, czyli nie wypłaca odsetek lub nie wykupuje obligacji w terminie.

Strona główna
Strona tytułowa
Strona 2 z 37
Powrót
Full Screen
Zamknij
Koniec

Ryzyko zmiany ceny występuje gdy obligatariusz zamierza sprzedać obligację przed terminem wykupu

przykład

Kupujemy 26-tygodniowy bon skarbowy na przetargu o wartości namonalnej 100 zł za 96 zł, co implikuje półroczną stopę spot $r(0{,}5) = 8{,}33\%$

taka byłaby zrealizowana stopa zwrotu gdyby trzymać bon do wykupu

sprzedajemy ten bon na 13 tygodni przed wykupem ($0{,}25$ roku)

rozważmy dwa scenariusze:

— rynkowe stopy (w szczególności interesująca nas stopa 3-miesięczna) spadają o 200 punktów bazowych i teraz $r(0{,}25) = 6{,}33\%$,

— rynkowe stopy rosną o 200 punktów bazowych, czyli $r(0{,}25) = 10{,}33\%$.

W pierwszym przypadku, możemy sprzedać bon za

$$\frac{100}{1 + 0{,}0633 \times 0{,}25} = 98{,}44 \text{ zł}.$$

Co oznacza, że zrealizowana stopa zwrotu z inwestycji w bon wynosi 10,15%.

W drugim przypadku, możemy sprzedać bon za

$$\frac{100}{1 + 0{,}1033 \times 0{,}25} = 97{,}48 \text{ zł}.$$

Co oznacza, że zrealizowana stopa zwrotu wynosi 6,17%.

Przykład pokazuje, że sprzedaż bonu skarbowego przed terminem wykupu, może powodować, że zrealizowana stopa zwrotu może być inna niż stopa rynkowa, przy której dokonano inwestycji. Zabezpieczenie stopy zwrotu daje przetrzymanie bonu do terminu wykupu.

Ryzyko reinwestowania kuponów występuje gdy inwestujemy otrzymane odsetki od obligacji po stopie innej niż stopa YTM na początku inwestycji

przykład

3-letnia obligacja o stałych kuponach, $F = 100$ zł, $c = 6\%$ p.a., $m = 1$ $P = 97{,}38$ zł,
stąd $YTM = 7\%$

Jeśli stopa rynkowa się nie zmieni, czyli reinwestujemy odsetki po stopie 7%, to po 3 latach mamy wartość naszej inwestycji

$$V_3 = 6 \cdot (1{,}07)^2 + 6 \cdot 1{,}07 + 106 = 119{,}29\text{zł}$$

Strona główna
Strona tytułowa
Strona 5 z 37
Powrót
Full Screen
Zamknij
Koniec

Rozważmy teraz 2 alternatywne scenariusze:

I. scenariusz

po roku stopa spada o 200 pb do 5%, a po kolejnym roku rośnie o 400 pb do poziomu 9%

po roku: $P_1 = 101{,}86$ zł, możemy kupić za odcięty kupon $6/101{,}86 = 0{,}059$ obligacji, czyli mamy teraz 1,059 obligacji

po kolejnym roku: $P_2 = 97{,}25$ zł
za kolejny kupon w wysokości $6 \cdot 1{,}059 = 6{,}354$ zł możemy teraz kupić $6{,}354/97{,}25 = 0{,}065$ obligacji
po dwóch latach mamy 1,124 obligacji

po 3 roku: mamy więc wypłatę $1{,}124 \cdot 106 = 119{,}14$ zł i to jest wartość naszej inwestycji

II. scenariusz

po roku stopa rośnie o 200 pb do 9%, a po kolejnym roku spada o 400 pb do poziomu 5%

po roku: $P_1 = 94{,}72$ zł, możemy kupić za odcięty kupon $6/94{,}72 = 0{,}063$ obligacji, czyli mamy teraz 1,063 obligacji.

po kolejnym roku: $P_2 = 100{,}95$ zł za kolejny kupon w wysokości $6 \cdot 1{,}063 = 6{,}378$ zł możemy kupić $6{,}378/100{,}95 = 0{,}063$ obligacji; czyli po dwóch latach mamy 1,128 obligacji

po 3 roku: wartość naszej inwestycji wynosi $1{,}128 \cdot 106 = 119{,}57$ zł

w drugim scenariuszu mamy największą wartość naszej inwestycji w obligację
wzrost rynkowej stopy procentowej po roku, spowodował spadek cen obligacji i umożliwił kupno ich większej liczby za wypłacony kupon

przykład

mamy 5-letnią obligację o stałych kuponach, $F = 100$ zł, $c = 6\%$ p.a., $m = 1$, $P = 95{,}90$ zł; zatem $YTM = 7\%$

Jeśli stopa rynkowa się nie zmieni, czyli reinwestujemy kupony po stopie 7%, to po 3 latach wartość inwestycji w obligację wyniesie

$$V_3 = 6 \cdot (1{,}07)^2 + 6 \cdot 1{,}07 + 6 + \frac{6}{1 + 0{,}12} + \frac{106}{(1 + 0{,}12)^2} = 117{,}48 \text{ zł}$$

Rozważmy teraz 2 scenariusze:

I. scenariusz

po roku stopa spada o 200 pb do 5%, a po kolejnym roku rośnie o 400 pb do poziomu 9%.

po roku: $P_1 = 103{,}55$ zł, możemy kupić za odcięty kupon $6/103{,}55 = 0{,}058$ obligacji, czyli mamy teraz 1,058 obligacji

po kolejnym roku: $P_2 = 92{,}41$ zł, za kolejny kupon w wysokości $6 \cdot 1{,}058 = 6{,}348$ zł możemy teraz kupić $6{,}348/92{,}41 = 0{,}069$ obligacji; czyli po dwóch latach mamy 1,127 obligacji.

po 3 roku: mamy wypłatę odsetek w wysokości $1{,}127 \cdot 6 = 6{,}76$ zł; również sprzedajemy obligację; do zapadalnosci pozostało 2 lata, YTM wynosi 9%, zatem $P_3 = 94{,}72$ zł; mamy 1,127 obligacji, stąd wartość inwestycji wynosi 106,72 zł.

Całkowita wartość naszej inwestycji w obligację wynosi

$$V_3 = 6{,}76 + 106{,}75 = 113{,}48 \text{ zł}.$$

II. scenariusz

po roku stopa rośnie o 200 pb do 9%, a po kolejnym roku spada o 400 pb do poziomu 5%.

po roku: cena obligacji wynosi $P_1 = 90{,}28$ zł. Zatem możemy kupić za odcięty kupon $6/9{,}28 = 0{,}066$ obligacji, czyli mamy teraz 1,066 obligacji.

po kolejnym roku: $P_2 = 102{,}72$ zł, za kolejny kupon w wysokości $6 \cdot 1{,}066 = 6{,}396$ zł możemy teraz kupić $6{,}396/102{,}72 = 0{,}062$ obligacji; czyli po dwóch latach mamy 1,128 obligacji.

po 3 roku: mamy wypłatę odsetek w wysokości $6 \cdot 1{,}128 = 6{,}77$ zł; sprzedajemy obligację; do zapadalnosci pozostało 2 lata, YTM wynosi 5%, $P_3 = 101{,}86$ zł; mamy 1,128 obligacji, zatem wartość inwestycji wynosi 114,97 zł.

Całkowita wartość naszej inwestycji w obligację wynosi

$$V_3 = 6{,}77 + 114{,}97 = 121{,}746 \text{ zł}.$$

wartość inwestycji zależy istotnie od scenariusza jaki nakreśli rynek stóp procentowych, i od czasu pozostającego do zapadalności obligacji

2. Duration obligacji

duration instrumentu o stałym dochodzie = średnia ważona chwil czasowych, w których dokonywane są płatności gotówkowe
Wagami są wartości dzisiejsze poszczególnych przepływów gotówkowych.
przepływy gotówkowe otrzymywane są w chwilach $t_1, t_2, \ldots, t_n$; duration takiego strumienia płatności dane jest

$$D = \frac{PV(t_1) \cdot t_1 + PV(t_2) \cdot t_2 + \cdots + PV(t_n) \cdot t_n}{PV} \tag{1}$$

gdzie $PV(t_i)$ oznacza wartość dzisiejszą płatności, która występuje w chwili t_i, natomiast PV wartość dzisiejszą strumienia płatności, czyli w naszym wypadku cenę obligacji.

nie precyzujemy w jaki sposób są dyskontowane przyszłe płatności.

dla obligacji będzie spełniona zależność $t_1 \leqslant D \leqslant t_n$

duration jest czasem pomiędzy pierwszą i ostatnią płatnością

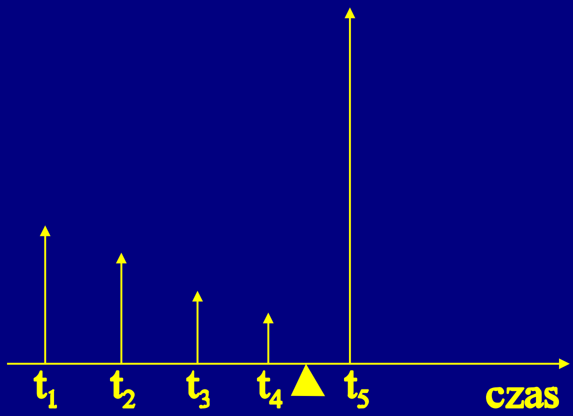
Strona główna
Strona tytułowa

Powrót
Full Screen
Zamknij
Koniec

duration obligacji 0-kuponowej jest równe okresowi zapadalności tej obligacji

obligacja kuponowa ma duration mniejsze niż czas zapdalności

duration może być postrzegane jako uogólniona miara zapadalności obligacji.



2.1. Duration dla modelu ciągłego

$$P = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{-yt_i} \tag{2}$$

gdzie $y = YTM$.
Definiujemy *duration* następująco

$$D := \frac{1}{P} \sum_{i=1}^{n} t_i C_i e^{-yt_i} \tag{3}$$

Zapiszmy wprowadzoną definicję inaczej

$$D = \sum_{i=1}^{n} t_i \frac{C_i e^{-yt_i}}{P} \tag{4}$$

czyli

$$D = \sum_{i=1}^{n} t_i \times w_i \tag{5}$$

gdzie współczynnik

$$w_i = \frac{C_i e^{-yt_i}}{P}$$

dla $1 \leqslant i \leqslant n$, jest wagą, bo $\sum_1^n w_i = 1$.
duration pokazuje średni ważony czas do terminu wykupu obligacji

duration ma związek z wrażliwością na zmianę YTM obligacji

cena obligacji P jest funkcją trzech parametrów $P = P(y, T, c_i)$

liczymy pochodną ceny obligacji P względem stopy zwrotu w terminie do wykupu y

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\sum_{i=1}^{n} t_i C_i e^{-y t_i} \tag{6}$$

Porównując obliczoną zależność z wyrażeniem na duration obligacji (3) otrzymujemy zwiazek

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -D \cdot P \tag{7}$$

Dla małych zmian ceny P i $y = YTM$ mamy

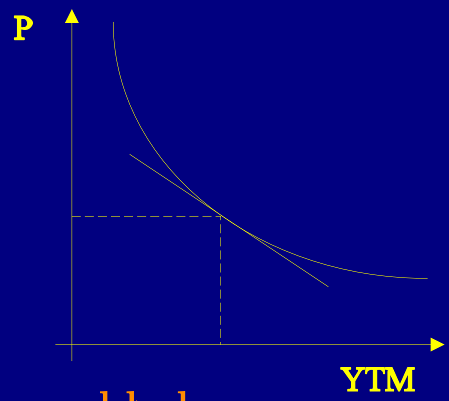
$$\frac{\Delta P}{\Delta y} = -D \cdot P \tag{8}$$

czyli

$$\frac{\Delta P}{P} = -D \Delta y \tag{9}$$

lub

$$\Delta P = -D \cdot P \Delta y \tag{10}$$



przykład

obligacja o następujących parametrach: T=3, c = 10% p.a., m=2, P = 94,21, y=12% D=2,65

Podstawiając do zależności (10), mamy

$$\Delta P = -94{,}21 \times 2{,}65 \Delta y$$

czyli

$$\Delta P = -249{,}95 \Delta y \tag{11}$$

YTM rośnie o 10 punktów bazowych, czyli $\Delta y = 0{,}001$, zatem $\Delta P = -0{,}25$

Jeśli $y = 0{,}121$ (12,1%), to cena obligacji wynosi

$$P = 94{,}21 - 0{,}25 = 93{,}96.$$

Możemy to sprawdzić, dokonując obliczeń w arkuszu.

YTM spada o 10 punktów bazowych, czyli $\Delta y = -0{,}001$, zatem nowe $y = 0{,}119$ (11,9%). Stąd $\Delta P = 0{,}25$ czyli cena obligacji wynosi

$$P = 94{,}21 + 0{,}25 = 94{,}46$$

Ryzyko . . .
Duration obligacji
Immunizacja . . .
Wypukłość obligacji
Duration . . .
Immunizacja . . .
Strona główna
Strona tytułowa
Strona 16 z 37
Powrót
Full Screen
Zamknij
Koniec

aproksymacja nie pracuje dobrze dla dużych zmian Δy
YTM rośnie o 200 punktów bazowych, czyli $\Delta y = 0{,}02$, nowe $y = 0{,}14$ (14%), a stąd $\Delta P = -5{,}00$. Czyli nowa cena obligacji

$$P = 94{,}21 - 5 = 89{,}21$$

Poprawana cena obligacji to $P = 89{,}35$.

YTM spada o 200 punktów bazowych
wtedy $\Delta y = -0{,}02$, $y = 0{,}10$ (10%), $\Delta P = 5{,}00$ czyli nowa cena obligacji

$$P = 94{,}21 + 5 = 99{,}21$$

jednak poprawna cena to P=99,36.

2.2. Duration dla modelu dyskretnego

Dla modelu dyskretnego mamy wzór na cenę obligacji

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{C/m}{(1+y/m)^i} + \frac{F}{(1+y/m)^n} \tag{12}$$

Obliczmy pochodną funkcji ceny obligacji P względem stopy zwrotu w terminie do wykupu y

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{-1/m\, C/m}{(1+y/m)^2} + \frac{-2/m\, C/m}{(1+y/m)^3} + \cdots \\ &\quad + \frac{-n/m\, C/m}{(1+y/m)^{n+1}} + \frac{-n/m\, F}{(1+y/m)^{n+1}} \end{aligned} \tag{13}$$

wyłączymy teraz czynnik $-\frac{1}{1+y/m}$ przed nawias i dostaniemy

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= -\frac{1}{1+y/m}\Bigg(\frac{1/m\, C/m}{1+y/m} + \frac{2/m\, C/m}{(1+y/m)^2} + \cdots \\ &\quad + \frac{n/m\, C/m}{(1+y/m)^n} + \frac{n/m\, F}{(1+y/m)^n}\Bigg) \end{aligned} \tag{14}$$

Ryzyko . . .
Duration obligacji
Immunizacja . . .
Wypukłość obligacji
Duration . . .
Immunizacja . . .
Strona główna
Strona tytułowa
Strona 18 z 37
Powrót
Full Screen
Zamknij
Koniec

Teraz podzielmy obie strony równania (14) przez cenę P

$$\frac{\partial P}{\partial y}\frac{1}{P} = -\frac{1}{1+y/m}\left(\frac{1/m\,C/m}{1+y/m}+\frac{2/m\,C/m}{(1+y/m)^2}+\cdots + \frac{n/m\,C/m}{(1+y/m)^n}+\frac{n/m\,F}{(1+y/m)^n}\right)\frac{1}{P} \tag{15}$$

i mamy definicję duration obligacji

$$\begin{aligned} D &= \sum_{i=1}^{n}\frac{i/m\,C/m}{(1+y/m)^i}\frac{1}{P} \\ &= \frac{1}{m}\left(\frac{1\,C/m}{1+y/m}+\cdots+\frac{n\,C/m}{(1+y/m)^n}+\frac{n\,F}{(1+y/m)^n}\right)\frac{1}{P} \end{aligned} \tag{16}$$

Tak sformułowana definicja duration obligacji została podana przez Fredericka Macaulay'a w raporcie dla National Bureau of Economic Research w 1938 roku. Stąd czas trwania nazywamy duration Macaulay.

Wykorzystując definicję duration dla modelu dyskretnego mamy

$$\frac{\partial P}{\partial y}\frac{1}{P} = -\frac{1}{1+y/m}D \tag{17}$$

czyli uzyskaliśmy prawie takie samo wyrażenie jak dla kapitalizacji ciągłej.

Aby mieć zgodność formuł dla kapitalizacji ciągłej i dyskretnej musimy definicję (16) trochę poprawić. Wprowadźmy pojęcie zmodyfikowanego *duration* D_M (możemy spotkać też oznaczenia: MD lub $D^\star$)

$$D_M = \frac{1}{1+y/m}D \tag{18}$$

i wtedy

$$\frac{\partial P}{\partial y}\frac{1}{P} = -D_M \tag{19}$$

Charakter zależności (19) jest dokładnie taki sam jak dla modelu ciągłego. Przykładowe obliczenia duration oraz zmodyfikowanego duration dla modelu dyskretnego można znaleźć w arkuszu.

Strona główna
Strona tytułowa

Powrót
Full Screen
Zamknij
Koniec

Duration można też liczyć korzystając ze wzoru na rentę okresową

wartość obecna strumienia płatności

=

wartość dzisiejsza renty okresowej

+ zdyskontowany nominał

wartość dzisiejsza renty okresowej =

$$PA(y,n) = \frac{C}{y}\left(1 - \frac{1}{(1+y/m)^n}\right) \tag{20}$$

$$\text{zdyskontowany nominał} = \frac{F}{(1+y/m)^n} \tag{21}$$

różniczkując względem y pierwszy i drugi wyraz, sumując wyrazy i dzieląc przez cenę obligacji P, otrzymujemy

$$D = \frac{m+y}{my} - \frac{m+y+n(c-y)}{mc[(1+y/m)^n - 1] + my} \tag{22}$$

przykład

$T = 30$ lat, 0-kuponową obligację, $y = 10\%$ p.a., D=30,
$D_M = 1/(1 + 0,1)D$= 27,3
YTM rośnie o 100 pb, czyli o 1%
zatem względna cena zmieni się o 27,3%

Własności *duration*

Weźmy model ciągły wyceny obligacji z duration D, a dla modelu dyskretnego mamy zmodyfikowane duration D_M. Zachodzą następujące zależności:

1. przy danym okresie do wykupu i danej stopie zwrotu w terminie do wykupu YTM, im niższe oprocentowanie obligacji tym większe duration D (zmodyfikowane duration D_M),
2. przy danym oprocentowaniu obligacji i danej stopie zwrotu w terminie do wykupu YTM, im dłuższy okres do wykupu tym większe duration D (MD),
3. przy danym oprocentowaniu obligacji i danym czasie do wykupu, im niższa stopa zwrotu w terminie do wykupu YTM tym większe duration D (MD),

Na pierwszy rzut oka może się wydawać, że obligacja o nieskończonym czasie życia ma duration też nieskończone. Okazuje się jednak, że to nie jest prawdą. Duration obligacji stabilizuje się na pewnej skończonej wartości. Przykładowe obliczenia zamieszczone są w arkuszu.

Duration portfela obligacji

Załóżmy, że mamy n obligacji w portfelu, przy czym waga każdej z nich wynosi w_i, gdzie $1 \leqslant i \leqslant n$. Wtedy duration portfela obligacji wyraża się zależnością

$$D = \sum_{i=1}^{n} w_i D_i \tag{23}$$

$\Rightarrow$ **projekt**

3. Immunizacja portfela obligacji

częsty cel inwestowania: uzyskać na koniec okresu inwestowania określoną wartość

naturalną strategią byłoby zainwestowanie w obligacje, których zapadalność jest taka sama jak długość okresu inwestowania i dodatkowo wartość takiego portfela obligacji jest taka sama jak wartość dzisiejsza pożądanej wartości końcowej inwestycji
jednak taka sytuacja nie występuje często w rzeczywistości, bo takie obligacje mogą być niedostępne na rynku

można zainwestować w obligacje o krótszym terminie zapadalności niż czas inwestowania, ale ryzyko reinwestowania

można również zainwestować w obligacje o dłuższym terminie zapadalności niż czas inwestowania i sprzedać te obligacje przed terminem wykupu ale ryzyko zmiany ceny, a ponadto ryzyko reinwestowania odsetek

immunizacja portfela = utworzenie portfela, którego duration równy jest okresowi inwestowania i którego wartość jest równa wartości dzisiejszej oczekiwanej wartości końcowej portfela

Strona główna
Strona tytułowa
◀◀ ▶▶
◀ ▶
Strona 24 z 37
Powrót
Full Screen
Zamknij
Koniec

przykład

chcemy mieć po 4 latach 157,3 tys. zł

na rynku dostępna jest 5-letnia obligacja o stałym oprocentowaniu 12% p.a., $m = 1$, $F = 100$ zł, P= 93,13 zł, $YTM = 14,0\%$

więcej, $D = 4$ lata

(zastosowaliśmy model kapitalizacji ciągłej)

kupujemy 1000 obligacji, by po 4 latach uzyskać 157,3 tys. zł.

stopy zmieniają się po kilku dniach od naszej inwestycji i pozostają na tym poziomie do końca czasu naszej inwestycji

Wartość naszej inwestycji po 3,5 roku, 4 latach i po 4,5 roku

	Wartość inwestycji		
stopa	$V_{3,5}$	V_4	$V_{4,5}$
10%	150,18	157,51	165,20
12%	148,68	157,35	166,53
14%	147,32	157,30	167,95
16%	146,10	157,35	169,47
18%	144,99	157,50	171,09

zabezpieczamy wysokość zobowiązania portfelem obligacji

przykład

przedsiębiorstwo ma do uregulowania zobowiązanie za 10 lat w wysokości 1 mln zł

kupno 10-letniej obligacji 0-kuponowej rozwiązałoby problem, jednak na rynku nie ma takich obligacji

dostępne są tylko 3 obligacje, $m = 2$ o parametrach:

obligacja	oprocentowanie	zapadalność	cena	YTM
1	6%	30 lat	69,04	9,0%
2	11%	10 lat	113,01	9,0%
3	9%	20 lat	100,00	9,0%

wszystkie obligacje mają taką samą do wykupu $YTM = 9\%$

wartość dzisiejsza 1 mln zł za 10 lat to

$$\frac{1}{(1+0{,}09)^{10}} = 414{,}643 \text{ tys. zł}$$

duration obligacji: $D_1 = 11{,}44$ lat, $D_2 = 6{,}54$ lat, $D_3 = 9{,}61$ lat.

Ryzyko . . .
Duration obligacji
Immunizacja . . .
Wypukłość obligacji
Duration . . .
Immunizacja . . .
Strona główna
Strona tytułowa
Strona 26 z 37
Powrót
Full Screen
Zamknij
Koniec

konstrujemy portfel składający się z obligacji pierwszej i drugiej
immunizowany portfel powinien spełniać warunki

$$w_1 + w_2 = 1$$
$$w_1 D_1 + w_2 D_2 = 10$$

w_i waga i-tej obligacji, D_i duration i-tej obligacji, $i = 1, 2$
pierwszy warunek $=$ aktywa są lokowane w dwie obligacje
drugi warunek $=$ duration portfela

rozwiązując układ równań mamy:
wagi $w_1 = 0{,}706$ oraz $w_2 = 0{,}294$
w pierwszej obligacji:
$w_1 \cdot 414{,}643 = 292{,}789$ tys. zł,
a w drugiej:
$w_2 \cdot 414{,}643 = 121{,}854$ tys. zł.

wynik zabezpieczenia
zmiany portfela obligacji oraz zobowiązania przedsiębiorstwa:

	8%	9%	10%
obligacja 1			
cena	77,38	69,04	62,14
liczba	4 241	4 241	4 241
wartość	328 157,36	292 798,63	263 526,73
obligacja 2			
cena	120,39	113,01	106,23
liczba	1 078	1 078	1 078
wartość	129 811,79	121 854,23	114 543,62
wartość portfela	457 969,15	414 642,86	378 070,35
wartość zobowiązania	456 386,95	414 642,86	376 889,48
różnica	1 582,21	0,00	1 180,87

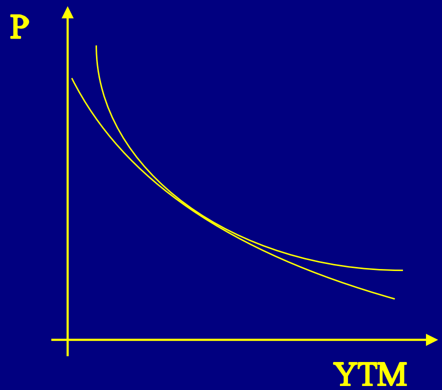
Immunizacja portfela:
– idea osłony bardzo prosta i przejrzysta
– ze względu na upływ czasu do zapadalności i zmianę stopy procentowej, musimy dokonywać zmiany składu portfela, czyli musimy immunizować portfel na bieżąco (koszty transakcji)
– na rynku obligacje o tej samej YTM

4. Wypukłość obligacji

Duration (zmodyfikowane duration) mierzy nachylenie krzywej YTM-P w danym punkcie

prowadzi to do aproksymacji krzywej YTM-P, która służy do mierzenia ryzyka stopy procentowej jak również zarządzania tym ryzykiem
lepszą aproksymację krzywej możemy uzyskać dodając wyraz drugiego rzędu rozwinięcia funkcji P w szereg Taylora

wyraz drugiego rzędu w tym rozwinięciu związany jest z **wypukłością** obligacji i odpowiada za stopień krzywizny relacji YTM-P



$P = P(y, T, c_i)$, $y = YTM$, wypukłość $Conv$ w modelu ciągłym

$$Conv = \frac{1}{P}\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{n} C_i t_i^2 e^{-yt_i} \tag{24}$$

Wtedy możemy cenę obligacji aproksymować następująco

$$\Delta P = -DP\Delta y + \frac{1}{2} Conv P(\Delta y)^2 \tag{25}$$

W przypadku modelu dyskretnego

$$Conv = \frac{1}{m^2}\frac{1}{P}\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{1}{m^2}\frac{1}{P}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)C/m}{(1+y/m)^{i+2}} + \frac{n(n+1)F}{(1+y/m)^{n+2}}\right) \tag{26}$$

jednostkami wypukłości jest czas do kwadratu
wypukłość jest średnią ważoną $t_i t_{i+1}$, gdzie podobnie jak w przypadku duration, wagi są proporcjonalne do wartości dzisiejszej odpowiednich przepływów gotówkowych. Wynik jest modyfikowany przez czynnik $1/(1+y/m)^2$. Przykładowe wyznaczanie wypukłości obligacji można znaleźć w arkuszu.

Ryzyko . . .
Duration obligacji
Immunizacja . . .
Wypukłość obligacji
Duration . . .
Immunizacja . . .

Strona główna
Strona tytułowa
Strona 30 z 37
Powrót
Full Screen
Zamknij
Koniec

mamy obligację z ceną P i odpowiadającej jej stopie zwrotu w terminie do wykupu y, zatem możmy wyznaczyć zmodyfikowane duration D_M oraz wypukłość $Conv$ obligacji. Wtedy dla małych zmian stopy zwrotu w terminie do wykupu Δy odpowiadająca zmiana ceny obligacji będzie dana następująco

$$\Delta P = -D_M P \Delta y + \frac{1}{2} Conv P (\Delta y)^2 \tag{27}$$

Własności wypukłości

1. dodatnia wypukłość (*positive convexity*)

$$YTM \nearrow \Longrightarrow Conv \searrow$$

$$YTM \searrow \Longrightarrow Conv \nearrow$$

2. przy danej stopie zwrotu w terminie do wykupu YTM i okresie do wykupu T, im niższe oprocentowanie obligacji, tym większa wypukłość $Conv$,
3. przy danej stopie zwrotu w terminie do wykupu YTM i duration D obligacji, im niższe oprocentowanie obligacji, tym mniejsza wypukłość $Conv$ obligacji.

5. Duration Fishera-Weila

Koncepcja duration może być rozszerzona na strukturę czasową stopy procentowej – wrażliwość ze względu stopę spot
w szczególności: zachowanie na przesunięcia równoległe krzywej spot

mamy stopy spot: $r_1, r_2, \dots, r_n$
weźmy przesunięcie równoległe krzywej spot o wielkość λ
czyli $r_1 + \lambda, r_2 + \lambda, \dots, r_n + \lambda$

model kapitalizaji ciągłej
cena papieru dłużnego

$$P = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{-r_{t_i} t_i} \tag{28}$$

definiujemy duration Fishera-Weila następująco:

$$D_{FW} = \frac{1}{P} \sum_{i=0}^{n} t_i C_i e^{-r_{t_i} t_i} \tag{29}$$

definicja (1977 rok) analogiczna do definicji Macaulaya, ale oparta na stopach spot
jednostką duration Fishera-Weila jest czas
spełniony jest warunek: $t_0 \leqslant D_{FW} \leqslant t_n$.

Rozważymy teraz wrażliwość ceny obligacji na równoległe przesunięcie krzywej spot o λ i pokażemy, że jest ona determinowana przez duration Fishera-Weila D_{FW}. Dla dowolnej liczby λ cena obligacji wynosi

$$P(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} C_i e^{-(r_{t_i}+\lambda)t_i} \tag{30}$$

Zatem pochodna $P(\lambda)$ względem λ w punkcie 0 będzie dana

$$\left.\frac{dP(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = -\sum_{i=1}^{n} t_i C_i e^{-r_{t_i} t_i} \tag{31}$$

stąd **względna wrażliwość ceny**

$$\frac{1}{P(0)} \frac{dP(0)}{d\lambda} = -D_{FW} \tag{32}$$

Twierdzenie 5.1. *Jeśli cała krzywa spot przesunie się o* $r_{t_i} + \lambda$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ *to cena obligacji* $P(\lambda)$ *spełni zależność*

$$\frac{1}{P(0)} \frac{dP(0)}{d\lambda} = -D_{FW} \tag{33}$$

model kapitalizacji dyskretnej

wypłacane kupony m razy w roku, cena obligacji

$$P(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{m} \left(1 + \frac{r_k + \lambda}{m}\right)^{-k} \tag{34}$$

obliczamy pochodną ceny $P(\lambda)$ względem λ dla $\lambda = 0$

$$\frac{dP(0)}{d\lambda} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{m} \frac{C_k}{m} \left(1 + \frac{r_k}{m}\right)^{-(k+1)} \tag{35}$$

Gdy podzielimy zależność (35) przez $-P(0)$ to otrzymamy

$$D_Q = -\frac{1}{P(0)} \frac{dP(0)}{d\lambda} = \frac{1}{P(0)} \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{m} \frac{C_k}{m} \left(1 + \frac{r_k}{m}\right)^{-(k+1)} \tag{36}$$

Twierdzenie 5.2. *Jeśli cała krzywa spot przesunie się o* $r_{t_i} + \lambda$, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ *to cena* $P(\lambda)$ *spełnia zależność*

$$\frac{1}{P(0)} \frac{dP(0)}{d\lambda} = -D_Q \tag{37}$$

6. Immunizacja portfela obligacji ze względu na równoległe przesunięcie krzywej dochodowości

przykład

przedsiębiorstwo ma zobowiązanie w wysokości 1 mln pln za 5 lat
na rynku mamy stopy spot:

lata	stopa spot
1	7,67%
2	8,27%
3	8,81%
4	9,31%
5	9,75%
6	10,16%
7	10,52%
8	10,82%
9	11,15%
10	11,42%
11	11,67%
12	11,89%

na rynku mamy dwie obligacje o następujących parametrach:
I obligacja: $T_1 = 12$, $c_1 =$ 6% p.a., F_1=100 zł, P_1=65,95 zł
II. obligacja: $T_2 = 5$, $c_2 =$ 10% p.a., F_2=100 zł, P_2=101,65 zł

Obliczamy quasi-zmodyfikowane duration: $D_1 = 7{,}07$, $D_2 = 3{,}80$

wartość dzisiejsza 1 mln zł za 5 lat wynosi

$$\frac{1 \text{ mln}}{(1 + 0{,}0975)^5} = 627{,}903 \text{ tys. zł}$$

quasi-zmodyfikowane duration zobowiązania przedsiębiorstwa

$$\frac{5}{1 + r_5} = 4{,}56$$

warunek na odporny portfel

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= 1 \\ w_1 D_1 + w_2 D_2 &= 4{,}56 \end{aligned}$$

w_i waga i-tej obligacji, dla $i = 1, 2$
rozwiązanie układu równań: $w_1 = 0{,}23$, $w_2 = 0{,}77$.
liczba obligacji w portfelu: $x_1 = 2207{,}62$, $x_2 = 4744{,}60$.

wynik zabezpieczenia

następuje równoległe przesunięcie krzywej dochodowości odpowiednio 100 pb w dół oraz 100 pb w górę

zmiany portfela obligacji oraz zobowiązania przedsiębiorstwa:

	-100pb	0pb	+100pb
obligacja 1			
cena	70,85	65,95	61,51
liczba	2 208	2 208	2 208
wartość	156 438,87	145 619,10	135 821,19
obligacja 2			
cena	105,62	101,65	97,89
liczba	4 745	4 745	4 745
wartość	501 146,74	482 349,14	464 489,37
wartość portfela	657 585,62	627 968,24	600 310,56
wartość zobowiązania	657 306,33	627 902,60	600 063,23
różnica	279,29	65,64	247,33

obliczenia podano w arkuszu.

Ryzyko . . .
Duration obligacji
Immunizacja . . .
Wypukłość obligacji
Duration . . .
Immunizacja . . .
Strona główna
Strona tytułowa
Strona 37 z 37
Powrót
Full Screen
Zamknij
Koniec