Jerzy A. Dzieża

Instrumenty o stałym dochodzie

3 stycznia 2010 roku

Spis treści

Rozdział 1

Elementy arytmetyki finansowej

Czas to pieniądz.
Stara prawda

Nie robię przysług. Zadłużam się.
Motto starożytnego Sycylijczyka

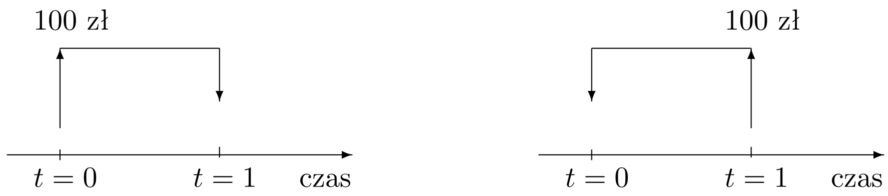
Ile jesteś w stanie zapłacić dzisiaj za możliwość otrzymania 1000 zł za rok? Czy zainwestowanie dziś kwoty 900 zł byłoby dobrym posunięciem?

Przypuśćmy, że za 20 lat przechodzimy na emeryturę i będziemy potrzebować 100 tys. zł rocznie. Ile musimy zainwestować dzisiaj, aby osiągnąć wyznaczony cel, jeśli można inwestować środki pieniężne na przykład na 8% w skali roku?

Decyzje finansowe dotyczą kosztów i zysków, które są ponoszone lub uzyskiwane w różnym czasie. Inwestorzy muszą więc porównać wartości różnych kwot pieniężnych w różnych okresach.

Z racji tej, że wycena papierów dłużnych opiera się na pojęciu **wartości pieniądza w czasie** (*time value of money*), przypomnimy sobie na początku podstawowe idee z tym związane. Wartość pieniądza w czasie odwołuje się do prostej zasady, że złotówka dzisiaj (którą mamy w ręku) jest więcej warta niż (przyrzeczona) złotówka w przyszłości. Istnieją ku temu przynajmniej trzy powody:

- posiadane środki możemy zainwestować (chociażby założyć lokatę w banku) i zainkasować odsetki, czyli powiększyć kapitał początkowy,



Rysunek 1.1. Kapitalizacja i dyskontowanie

- siła nabywcza naszych pieniędzy zmienia się w czasie ze względu na inflację[1],
- przyszłe wpływy pieniężne są niepewne (występuje ryzyko kredytowe (*credit risk, default risk*) problem szczególnie ważny we współczesnych finansach).

Odpowiemy sobie na pytania:

- Ile wynosi wartość przyszła pewnej kwoty pieniędzy danej dzisiaj?
- Ile wynosi wartość dzisiejsza pewnej kwoty pieniędzy danej w ustalonej przyszłej chwili?

Te rozważania przeprowadzimy w sytuacji, gdy będziemy mieć tylko jedną płatność (przepływ gotówki) oraz ciąg płatności w rozważanym horyzoncie inwestycyjnym. Zaczniemy od najprostszej sytuacji, gdy odsetki nie są dopisywane do kapitału początkowego.

Zatem kwoty pieniężne będziemy przesuwać po osi czasu. Przesunięcie kwot pieniężnych od ustalonej chwili w przyszłość będziemy nazywać **kapitalizacją** natomiast przesunięcie kwot pieniężnych od ustalonej chwili wstecz **dyskontowaniem**.

W dalszym ciągu będziemy zakładać, że wszystkie analizowane instrumenty dłużne nie mają ryzyka kredytowego, co oznacza, że emitent instrumentu zawsze wywiąże się ze swoich zobowiązań. Wszystkie przyrzeczone płatności będą zrealizowane.

Pokażemy, że wartość pieniądza w czasie możemy opisać w języku stopy spot, czynnika dyskontowego oraz stopy forward.

1.1. Wartość pieniądza w czasie - jedna płatność

Najprostszym wyrazem zmiany wartości pieniądza w czasie są zmiany wartości konta bankowego. Załóżmy, że na konto bankowe zostaje wpłacona kwota PV. Po rozpatrywanym okresie przyjmie ona wartość FV. Wartość PV będziemy nazywać wartością teraźniejszą (*present value*), natomiast wartość FV **wartością przyszłą** (*future value*). Różnicę $FV - PV$ nazywamy (**odsetkami**).

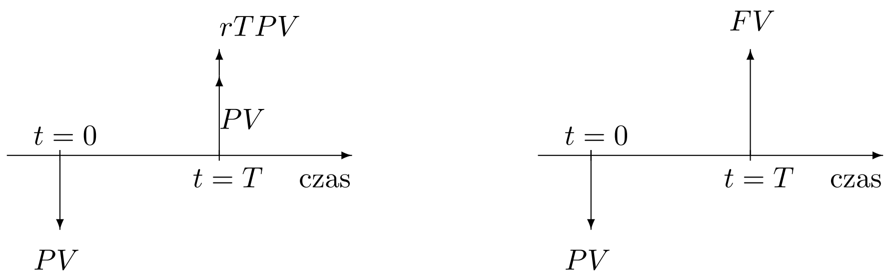
Wartość przyszła pewnej kwoty pieniężnej będzie zależała od tego czy:

- odsetki są płacone tylko od nominału czyli **kapitalizacja prosta** (*simple interest*),
- dodatkowo od narosłych odsetek czyli **kapitalizacja złożona** (*compound interest*).

1.1.1. Kapitalizacja prosta

Przypuśćmy, że dysponujemy w chwili obecnej gotówką w wysokości PV złotych. Załóżmy, że stopa procentowa dla wkładów rocznych wynosi $r > 0$ i że nie ulegnie zmianie w ciągu roku. Gdy złożymy pieniądze w banku na rok, uzyskamy kwotę rPV odsetek. Liczbę r nazywamy (roczną) **stopą oprocentowania**. W dalszej części

[1] Proces odwrotny do inflacji - deflacja, sugeruje odroczenie konsumpcji w czasie



Rysunek 1.2. Wartość przyszła w kapitalizacji prostej z dołu.

będziemy stosować konwencję, że wszystkie stopy procentowe są zawsze podawane w skali roku. To ułatwia ich porównywanie i upraszcza zapis.

Kapitalizacja **prosta** oznacza, że odsetki nie są dopisywane do kapitału. Zakładając, że stopa procentowa pozostaje stała, po kolejnym roku mamy dodatkowo rPV odsetek, co daje razem $2rPV$ odsetek. Ogólnie, po czasie T mierzonym w latach uzyskujemy $TrPV$ odsetek, czyli **przyszła wartość** (*future value*) FV po czasie T wyniesie

$$FV = PV(1 + rT) \tag{1.1}$$

Zauważmy, że na wartość przyszłą składa się kapitał PV oraz odsetki $rTPV$ (rys. 1.2). Widzimy, że odsetki płacone są z dołu.

Przykład 1.1 Przypuśćmy, że mamy $PV = 100$ zł i lokujemy taką kwotę w banku na 2 lata, przy stałym (rocznym) oprocentowaniu $r = 8\%$. Po dwóch latach będziemy mieć

$$FV = PV(1 + rT) = 100 \cdot (1 + 2 \cdot 0{,}08) = 100 \cdot 1{,}16 = 116 \text{ zł}$$

□

Liczbę $(1 + rT)$ nazywamy **współczynnikiem akumulacji** lub **czynnikiem wartości przyszłej** w kapitalizacji prostej. Natomiast odwrotność tej wielkości nazywamy **czynnikiem dyskontowym** (*discount factor*) DF

$$DF(T) = \frac{1}{1 + rT} \tag{1.2}$$

Przypuśćmy teraz, że chcemy wyliczyć **wartość dzisiejszą** PV (*present value*) pewnej kwoty pieniędzy FV po czasie T liczonym w latach. Czyli wartość dzisiejsza PV to taka kwota pieniędzy, która ulokowana w banku na okres T lat daje nam po upływie tego okresu właśnie kwotę FV. Aby to zrobić, wystarczy przekształcić zależność (1.1) i wyznaczyć PV:

$$PV = \frac{1}{1+rT} FV = (1+rT)^{-1} FV = DF(T)\, FV \tag{1.3}$$

Liczbę PV nazywamy też **wartością zdyskontowaną** liczby FV.

Przykład 1.2 Ile musimy ulokować na rachunku bankowym aby móc podejmować co rok 12 000 zł odsetek przy kapitalizacji prostej i stałej stopie oprocentowania 8%?
Zauważmy, że należne odsetki możemy wyznaczyć z zależności (1.1):

$$FV = PV(1+rT) = PV + PVrT$$

wiemy, że odsetki $PVrT = 12\,000$ zł i stąd

$$PV = \frac{12\,000}{rT} = \frac{12\,000}{0{,}08 \cdot 1} = 150 \text{ tys. zł}$$

□

Mając dane PV, FV oraz T możemy wyliczyć r. Przekształcając zależność (1.1) uzyskamy stopę zwrotu tej inwestycji w danym okresie

$$rT = \frac{FV - PV}{PV}$$

czyli procentowy przyrost wartości dzisiejszej. Musimy jeszcze uwzględnić długość okresu, aby otrzymać stopę zwrotu w skali roku, czyli musimy przeskalować czas

$$r = \frac{1}{T}\frac{FV - PV}{PV} \tag{1.4}$$

i mamy wtedy stopę zwrotu (rentowność) z inwestycji w skali roku.

Dotychczasowe rozważania w zupełności wystarczą nam do wyznaczenia rentowności bonów skarbowych kwotowanych na polskim rynku pieniężnym. Pamiętamy, że do wyceny polskich bonów skarbowych przyjmujemy, że rok kalendarzowy to 360 dni.

Przykład 1.3 Inwestor kupuje 26 tygodniowy bon skarbowy o wartości nominalnej 100 zł, za 99,09 zł, na 57 dni przed wykupem.
Mamy zatem $FV = 100$, $PV = 99{,}09$, $T = \frac{57}{360}$. Policzmy rentowność r tego bonu jako stopę, dla której wartość dzisiejsza 100 zł za 57 dni wynosi 99,09 zł

$$99{,}09\left(1 + r\frac{57}{365}\right) = 100$$

czyli

$$r = \left(\frac{100}{99{,}09} - 1\right)\frac{365}{57} = 0{,}058 = 5{,}8\%.$$

□

W tym momencie (jako ćwiczenie) warto sobie przypomnieć zagadnienia podaży pieniądza i zastanowić się w jaki sposób Rada Polityki Pieniężnej ustala agregaty monetarne, a w szczególności wysokość stopy operacji otwartego rynku. Pamiętajmy, że ta operacja dotyczy ceny pieniądza za 7 dni, podobnie jak w Europejskim Banku Centralnym.

Zastanówmy się jeszcze nad stopą zwrotu z inwestycji w bon skarbowy.

Przykład 1.4 Inwestor kupuje skarbowy na okres 30 dni. Chciałby osiągnąć stopę zwrotu z tej inwestycji w wysokości 2% w tym okresie (nie w skali roku). Ile powinien zapłacić za bon skarbowy o wartości nominalnej 100 zł na 30 dni do wykupu tego bonu?
Stopa zwrotu z jego inwestycji musi spełniać warunek

$$2\% = \frac{100 - PV}{PV}$$

Czyli cena PV bonu wynosi

$$PV = \frac{100}{1 + 0{,}02} = 98{,}039$$

□

Na polskim rynku pieniężnym kwotuje się bony skarbowe podając ich rentowność, czyli **stopę zwrotu (dochodowości) rynku pieniężnego** (*money market yield* MMY). Na światowych rynkach pieniężnych stosuje się też inną konwencję, służące określeniu dochodowości inwestycji – **stopę dyskontową** (*discount rate*). Zobaczmy jak pracuje to pojęcie.

Przypuśćmy, że za rok mamy zapłacić 100 zł. Mamy możliwość zapłacenia tylko 92 zł, ale dziś. Uzyskujemy upust d=8% mierzony jako stosunek różnicy wartości przyszłej FV i dzisiejszej PV do wartości przyszłej FV. Czyli mamy zależność na stopę dyskontową

$$d = \frac{FV - PV}{FV}$$

Jeśli uwzględnimy horyzont czasowy T, który jest różny od 1 roku, to otrzymamy zależność

$$dT = \frac{FV - PV}{FV} \tag{1.5}$$

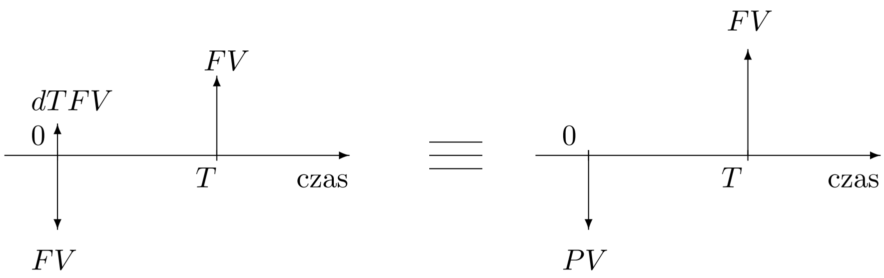
Różnicę wartości przyszłej FV i dzisiejszej PV występującą w liczniku wyrażenia (1.5) nazywamy **dyskontem** (*discount*). Zauważmy, że odpowiada to kapitalizacji z góry (rys. 1.3).

Przykład 1.5 Wyznacz cenę amerykańskiego bonu skarbowego, jeśli do terminu wykupu pozostało 50 dni, a stopa dyskontowa $d = 3{,}12\%$.
Po przekształceniu zależności (1.5) dostaniemy

$$PV = FV(1 - dT)$$

czyli

$$PV = 100(1 - 0{,}0312 \cdot \frac{50}{360}) = 100(1 - 0{,}0043) = 99{,}56667$$



Rysunek 1.3. Wartość dzisiejsza w kapitalizacji prostej z góry

wartości nominalnej. Wiemy, że wartość nominalna takiego bonu to 100 tys. USD. Zatem za bon musimy zapłacić 99 566,67 USD. □

Gdy przekształcimy zależność (1.5) dostaniemy

$$FV = PV\frac{1}{1 - dT}. \tag{1.6}$$

Ostatnia zależność dostarcza nam interpretacji stopy dyskontowej d. Jeśli wzór (1.6) jest sumą ciągu geometrycznego (przy założeniu, że $| dT |< 1$), to możemy napisać

$$FV = PV + dTPV + (dT)^2PV + (dT)^3PV + \cdots$$

Oznacza to, że wartość przyszłą otrzymujemy przez dopisanie odsetek w wysokości $dTPV$, a następnie odsetek od kwoty odsetek $dT \cdot (dTPV)$, odsetek od tej kwoty $dT \cdot (dT(dTPV))$ i tak dalej. Czyli, gdy dopisujemy odsetki dziś, kapitał ulega zwiększeniu o $dTPV$, dopisujemy dziś odsetki do tej kwoty, kapitał ulega kolejnemu zwiększeniu, dopisujemy odsetki od kwoty zwiększenia i tak dalej. Z związku z taką interpretacją, stopę d nazywamy też **stopą kapitalizacji z góry**.

Kwota dyskonta świadczy o koszcie, który ponosi emitent bonu skarbowego. Z kolei dla jego nabywcy ważna jest informacja o stopie zwrotu r, jaką uzyska z tytułu inwestycji w bon skarbowy. Zatem naturalne jest pytanie o związek pomiędzy stopami r oraz d.

W analizowanym przykładzie, gdzie $d = 0{,}08$ (i założeniu, że $T = 1$ rok) możemy wyliczyć odpowiadającą stopę r: $100 = 92 \cdot (1 + r)$, a stąd $r = \frac{8}{92} = 8{,}696\%$.

Ogólnie, porównując wzory na wartość przyszłą obliczoną dwoma metodami mamy

$$\begin{aligned} FV &= PV(1 + rT) \\ FV &= PV\frac{1}{1 - dT} \end{aligned}$$

i po porównaniu obu stron mamy

$$1 + rT = \frac{1}{1 - dT}$$

czyli

$$r = \frac{1}{T}\left(\frac{1}{1-dT} - 1\right) = \frac{d}{1-dT}, \tag{1.7a}$$

$$d = \frac{1}{T}\left(1 - \frac{1}{1+rT}\right) = \frac{r}{1+rT} \tag{1.7b}$$

Przykład 1.6 Jaka jest rentowności r inwestycji w amerykański bon skarbowy z przykładu 1.5?
Korzystamy z zależności (1.7a) i mamy

$$r = \frac{d}{1-dT} = \frac{0{,}0312}{1 - 0{,}0312 \cdot \frac{50}{360}} = 3{,}134\%$$

□

Zastanówmy się nad tym, czy może zdarzyć się przypadek równości stopy rentowności r i dyskontowej d, czyli pytamy kiedy $r = d$? Rozwiązujemy równanie $\frac{1}{1-xT} = 1 + xT$ co daje $x = 0$. Czyli z wyjątkiem ekstremalnej sytuacji zerowych stóp procentowych mamy zawsze $r \neq d$. [2]

1.1.2. Instrumenty rynku pieniężnego

Kwotowanie to podawanie ceny kupna oraz sprzedaży określonego instrumentu finansowego. Na rynku międzybankowym obowiązuje zasada kwotowania obustronnego, tzn. dealer ma obowiązek podania ceny, po której jest skłonny nabyć dany instrument oraz ceny, po której jest gotowy go sprzedać. Kwotowania można podzielić na:

- informacyjne, które nie zobowiązuje dealera do zawarcia transakcji po podanych przez niego cenach
- transakcyjne, które jest obowiązujące dla stron i w czasie zawierania transakcji nie mogą się wycofać ani zmienić ceny, którą wcześniej uzgodniono

Istnieją trzy sposoby kwotowania instrumentów dyskontowych:

- cenowe (ceny podawane są w procentach wartości nominalnej)
- stopą rentowności (dochodowości)
- stopą dyskontową

Bez względu na sposób kwotowania inwestor uzyskuje ten sam przychód. Sposób kwotowania instrumentów dyskontowych zależy od lokalnego rynku finansowego.

[2] Bardzo często zdarza się, że stopa zwrotu z inwestycji jest przedstawiana w całym horyzoncie

Na polskim rynku przyjęte są dwie zasady kwotowania: cenowy oraz stopą dochodowości.

Wymóg kwotowania na podstawie cen występuje na rynku pierwotnym, natomiast na rynku wtórnym przyjęto zasadę kwotowania na podstawie dochodowości. W przypadku kwotowania cenowego dealerzy podają zwykle ceny z dokładnością do 4. miejsca po przecinku, natomiast jeśli kwotują rentownością i dyskontem zaokrąglenie wynosi 2 miejsca po przecinku. Zarówno stopa dochodowości jak i stopa dyskonta podawana jest w skali rocznej.

Przykład 1.7 Inwestor nabywa bony skarbowe o nominale 800 tys. zł i 117-dniowym terminie wykupu po cenie 98,12 za 100. Wyznaczmy

i) kwotę jaka musi dysponować aby nabyć te bony skarbowe

ii) rentowność nabytych instrumentów

iii) dyskonto z jakim nabył te instrumenty.

Kwota, którą przeznaczył inwestor na nabycie bonów skarbowych to

$$98{,}12\% \cdot 800 \text{ tys. zł} = 784{,}96 \text{ tys. zł}$$

Rentowność nabytych bonów

$$r = \frac{1}{T}\frac{FV - PV}{PV} = \frac{1}{0{,}325}\frac{100{,}00 - 98{,}12}{98{,}12} = 5{,}90\%$$

Dyskonto nabytych bonów

$$d = \frac{1}{T}\frac{FV - PV}{FV} = \frac{1}{0{,}325}\frac{100{,}00 - 98{,}12}{100{,}00} = 5{,}78\%$$

Możemy sprawdzić czy dyskont wyznaczyliśmy prawidłowo, podstawiając do zależności (1.7b)

$$d = \frac{0{,}059}{1 + 0{,}059 \cdot 0{,}325} = 5{,}78\%$$

czyli mamy ten sam wynik □

Przeanalizujmy jeszcze inny przykład.

Przykład 1.8 Załóżmy, że inwestor chce nabyć 225-dniowe bony skarbowe i prosi o kwotowania dwa banki. Bank A podaje kwotowanie na bazie dochodowości, która wynosi 6,24%, natomiast bank B podaje kwotowanie tego samego bonu na bazie dyskonta, które wynosi 6,08%. Którą z ofert powinien wybrać racjonalny inwestor? (zakładamy, że będzie to oferta o niższej cenie czy równoważnie o wyższej rentowności czy równoważnie wyższym dyskoncie).

W przypadku banku A cena oferowanego bonu wynosi

$$PV = \frac{FV}{1 + rT} = \frac{100{,}00}{1 + 0{,}0624 \cdot \frac{225}{360}} = 96{,}25\%$$

natomiast w przypadku banku B

$$PV = FV(1 - dT) = 100{,}00 \cdot (1 - 0{,}0608 \cdot \frac{225}{360}) = 96{,}08\%$$

Lepsze warunki kupna 225-dniowych bonów skarbowych oferuje bank B. □

Dzień rozliczenia transakcji Na rynku międzybankowym przyjęta jest zasada rozliczania zawartych transakcji na drugi dzień roboczy licząc od dnia, w którym zawarto transakcję (ustalono warunki transakcji). W żargonie bankowym takie rozliczenie nazywane jest "na datę spot". Przykładowo:
– jeśli transakcja zawierana jest we środę, jej rozliczenie przypada na piątek (pod warunkiem, że czwartek i piątek są dniami roboczymi)
– jeśli transakcja zawierana jest w piątek, jej rozliczenie przypada na wtorek (pod warunkiem, że poniedziałek i wtorek są dniami roboczymi)
– jeśli transakcja zawierana jest w piątek, a poniedziałek byłby dniem wolnym to jej rozliczenie przypadałoby na środę

Data spot jest najpowszechniej stosowaną datą rozliczenia, lecz nie jedyną. Niekiedy inwestorzy preferują inne daty. W przypadku wcześniejszej daty rozliczenia od daty spot, inwestor może rozliczać zawartą przez siebie transakcję w tym samym dniu (data: over night O/N) lub następnym po dokonaniu transakcji (data: tom next T/N)

Repo i reverse repo Operacja repo to transakcja sprzedaży określonego instrumentu rynku pieniężnego (zwykle dotyczy bonów skarbowych) z jednoczesnym zobowiązaniem się sprzedającego do jego odkupienia po określonej z góry cenie w określonym dniu w przyszłości.

Dla sprzedającego, transakcja ta oznacza przeprowadzenie operacji repo, natomiast dla kupującego taka transakcja oznacza przeprowadzenie transakcji reverse repo.

Na transakcję repo można patrzeć też jak na pożyczkę środków gotówkowych poprzez sprzedaż krótkoterminowych papierów dłużnych stronie przeciwnej.

Na transakcję reverse repo jak na lokatę środków pieniężnych poprzez kupno krótkoterminowych papierów dłużnych od strony przeciwnej.

Popularność rynku pieniężnego Do najczęściej wymienianych zalet inwestowania w bony należą dochodowość, bezpieczeństwo oraz płynność.

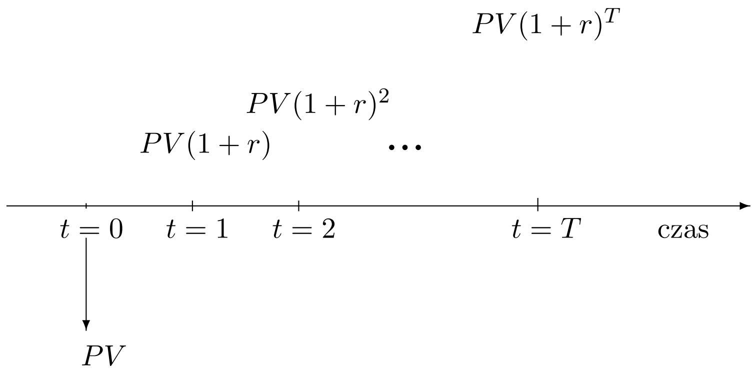
1.2. Kapitalizacja złożona

W sytuacji, gdy odsetki są dopisywane za każdym razem do kapitału, mamy do czynienia z **kapitalizacją złożoną** (*compound interest*). Okres, po którym są one dopisywane może być różny. Typowo jest to rok, 6 miesięcy, kwartał, miesiąc lub dzień i mówimy wtedy o kapitalizacji rocznej, półrocznej, kwartalnej, miesięcznej lub dziennej.

Przypuśćmy, że stopa oprocentowania jest stała i wynosi r w skali roku. Przy kapitalizacji rocznej po roku mamy $PV(1+r)$ (tak jak przy kapitalizacji prostej po roku inwestycji). W drugim roku sumą początkową jest $PV(1+r)$ i jej wartość po roku wzrośnie do $(PV(1+r))(1+r) = PV(1+r)^2$. Ogólniej, wartość kwoty PV po T latach obliczamy stosując T-krotnie powyższą regułę, co daje wzór

$$FV = PV(1+r)^T. \tag{1.8}$$

Odsetki od odsetek już naliczonych w poprzednim okresie nazywamy **odsetkami składanymi** (*compound interest*).



Rysunek 1.4. Składanie odsetek

Rozważmy sytuację, w której odsetki są dopisywane co pół roku, a roczna stopa procentowa jest bez zmian. Przy tej metodzie przyjmuje się, że po okresie półrocznym kwota PV wzrasta o $\frac{r}{2}PV$ do $PV(1+\frac{r}{2})$, a po roku do $PV(1+\frac{r}{2})^2$. Ogólnie, po k okresach półrocznych mamy

$$PV\left(1+\frac{r}{2}\right)^k,$$

a po T latach,

$$PV\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2T}.$$

Kapitalizacja półroczna jest korzystniejsza od rocznej z punktu widzenia osoby lokującej pieniądze. Zauważmy, że zachodzi taka nierówność (zakładając, że $r \neq 0$):

$$1+r < 1+2\cdot\frac{r}{2}+\frac{r^2}{4} = (1+\frac{r}{2})^2$$

czyli mnożąc obie strony przez PV uzyskujemy nierówność

$$PV(1+r) < PV(1+\frac{r}{2})^2$$

.

Przy kapitalizacji kwartalnej mamy po 3 miesiącach kwotę $PV(1+\frac{r}{4})$, po pół roku $PV(1+\frac{r}{4})^2$, po roku $PV(1+\frac{r}{4})^4$, a po T latach

$$PV\left(1+\frac{r}{4}\right)^{4T}.$$

Łatwo sprawdzić, że dopisywanie odsetek co kwartał jest korzystniejsze od kapitalizacji półrocznej.

Ogólnie, jeśli podzielimy rok na m równych okresów i stosujemy kapitalizację m-krotną (polegającą na dopisaniu odsetek co $\frac{1}{m}$ część roku w wysokości $\frac{r}{m}\cdot PV$), to po k okresach mamy kwotę

$$PV\left(1+\frac{r}{m}\right)^{k},$$

a po czasie T mierzonym w latach

$$FV = PV\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mT} \tag{1.9}$$

Zauważmy, że T lat to $m\cdot T$ okresów odsetkowych.

> Peter Minuit kupił od Indian w 1624 roku wyspę Manhattan za świecidełka o ówczesnej wartości 24 USD. Załóżmy, że Indianie mieli możliwość wymiany świecidełek na gotówkę i zainwestowania tych pieniędzy na 5% w skali roku. Ile warte byłyby te 24 USD w 2010 roku, jeśli byśmy zastosowali kapitalizację prostą ($m=1$) i złożoną ($m=2$).

Za efekt częstszej kapitalizacji odpowiada annualizowany (czyli w skali roku) **czynnik stopy procentowej** (*annualized interest rate factor*)

$$\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m}$$

który powoduje, że wartość przyszła naszej inwestycji zależy od częstotliwości kapitalizacji. Porównajmy wartości czynnika stopy procentowej. Rozważmy roczny horyzont inwestycyjny oraz przyjmijmy, że mamy roczną stopę procentową $r=10\%$ (tab. 1.1).

Odwróćmy teraz sytuację. Jeśli wiemy, że za T lat dostaniemy kwotę FV, to możemy zapytać ile dzisiaj jest warta ta kwota, czyli jaka jest wartość dzisiejsza PV kwoty FV za T lat? Załóżmy, że mamy daną stopę procentową r i naliczanie odsetek 1 raz w roku. Wtedy wartość dzisiejsza kwoty FV wynosi

$$PV = FV(1+r)^{-T}, \tag{1.10}$$

Tabela 1.1. Wartości czynników stopy procentowej
dla różnych kapitalizacji przy r =10%.

Kapitalizacja	czynnik stopy procentowej		stopa efektywna r_e
roczna	$(1+r)$	1,100000	10,00%
półroczna	$(1+\frac{r}{2})^2$	1,102500	10,25%
kwartalna	$(1+\frac{r}{4})^4$	1,103813	10,38%
miesięczna	$(1+\frac{r}{12})^{12}$	1,104713	10,47%
dzienna	$(1+\frac{r}{365})^{365}$	1,105156	10,52%

Czynnik $(1+r)^{-T}$ znany jest jako T-letni **czynnik dyskontowy** (*discount factor*) DF

$$DF(T) = (1+r)^{-T} \tag{1.11}$$

Jeśli dyskontowanie ma miejsce m razy w ciągu roku, to przekształcając zależność (1.9) dostaniemy wartość dzisiejszą kwoty FV za T lat

$$PV = FV\left(1+\frac{r}{m}\right)^{-mT} \tag{1.12}$$

i wtedy czynnik dyskontowy

$$DF_m(T) = \left(1+\frac{r}{m}\right)^{-mT}$$

Przykładowo, gdy stopa procentowa r=10%, to 5-letni czynnik dyskontowy dla m = 1 wynosi $DF_1(5) = (1+0{,}1)^{-5}$ =0,6209, a dla $m = 4$, $d_45 = (1+0{,}1/4)^{-20} = 0,6103$.

Policzmy analogicznie czynniki dyskonta dla różnych kapitalizacji. Zakładamy, że mamy roczną stopę r=10% i rozważamy roczny horyzont inwestycyjny (tab. 1.2).

1.3. Kapitalizacja ciągła

Rozważmy sytuację, w której odsetki są dopisywane m-krotnie w ciągu roku. Wtedy wartość przyszła FV kwoty PV po czasie t jest dana

$$FV = PV\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mt}$$

Tabela 1.2. Wartość czynników dyskontowych dla różnych kapitalizacji przy r=10%.

Kapitalizacja	czynnik dyskontowy	
roczna	$(1+r)^{-1}$	0,909090
półroczna	$(1+\frac{r}{2})^{-2}$	0,907029
kwartalna	$(1+\frac{r}{4})^{-4}$	0,905951
miesięczna	$(1+\frac{r}{12})^{-12}$	0,905212
dzienna	$(1+\frac{r}{365})^{-365}$	0,904850

Gdy przekształcimy to wyrażenie uzyskamy

$$FV = PV\left(\left(1+\frac{r}{m}\right)^{\frac{m}{r}}\right)^{rt} = PV\left(\left(1+\frac{1}{\frac{m}{r}}\right)^{\frac{m}{r}}\right)^{rt}$$

Zauważmy, że wyrażenie $(1+\frac{r}{m})^{\frac{m}{r}}$ nie zależy od okresu, a jedynie od częstości dopisywania odsetek.

Przechodząc do granicy z częstością dopisywania odsetek m oraz korzystając z faktu, że granica

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{m}{r}}\right)^{\frac{m}{r}} = e$$

uzyskamy zależność na wartość przyszłą FV w kapitalizacji ciągłej

$$FV = PV\mathrm{e}^{rt}. \tag{1.13}$$

Mamy zatem wartość przyszłą pewnej kwoty PV w **kapitalizacji ciągłej**, która jest matematyczną idealizacją częstej kapitalizacji. Uzyskany wzór jest dość dobrym jej przybliżeniem, a jest przy tym znacznie prostszy i łatwiejszy do przekształcania niż wzory związane z wielokrotną kapitalizacją złożoną. Model kapitalizacji ciągłej ma bardzo ważną własność addytywności, której nie posiada model dyskretny (w szczególności model kapitalizacji złożonej).[3] Niestety kapitalizacja ciągła jest stosowana praktycznie tylko w rozważaniach teoretycznych natomiast w rzeczywistości, rynki kapitałowe stosują model kapitalizacji dyskretnej.

Nietrudno się domyślić, że kapitalizacja ciągła będzie jeszcze korzystniejsza niż kapitalizacja złożona, z punktu widzenia osoby lokującej pieniądze.

Przykład 1.9 Przypuśćmy, że inwestujemy 100 zł na okres 1 roku na 10% w kapitalizacji ciągłej. Wartość przyszła naszej inwestycji wyniesie:

$$FV = 100\cdot e^{0,10\cdot 1} = 110{,}5171$$

[3] W zasadzie trudno mówić o składaniu oprocentowania w modelu kapitalizacji prostej.

□

Przykład 1.10 Załóżmy, że wpłaciliśmy do banku 100 zł na 2 lata. W pierwszym roku nasza lokata była oprocentowana w wysokości 8% w skali roku, a w drugim roku w wysokości 12% w skali roku. Jaką uzyskamy kwotę po dwóch latach, gdy stosujemy kapitalizację złożoną oraz ciągłą? Czy będzie to kwota wyższa o 8% + 12% = 20% niż kwota początkowa?

Zacznijmy od kapitalizacji złożonej. Po 2 latach mamy

$$FV = 100 \cdot (1 + 0{,}08) \cdot (1 + 0{,}12) = 120{,}96$$

Natomiast w kapitalizacji ciągłej wartość przyszła wynosi

$$FV = 100 \cdot e^{0{,}08 \cdot 1} \cdot e^{0{,}12 \cdot 1} = 122{,}14$$

W obu przypadkach mamy wyższą kwotę niż wynikałoby to z prostego dodania do siebie stóp zwrotu w każdym z podokresów. □

Konsekwencją tego faktu jest to, że w przypadku wyznaczania rocznej stopy zwrotu z inwestycji w przypadku kapitalizacji złożonej stosujemy średnią geometryczną, a w przypadku kapitalizacji ciągłej średnią arytmetyczną.

Przykład 1.11 Powróćmy do przykładu 1.10. Postawmy sobie teraz pytanie jaką uzyskaliśmy (roczną) stopę zwrotu z inwestycji w przypadku gdy stosujemy kapitalizację złożoną oraz ciągłą?

Zacznijmy od kapitalizacji złożonej. Po 2 latach mamy

$$FV = 100 \cdot (1 + 0{,}08) \cdot (1 + 0{,}12) = 120{,}96$$

W pierwszej chwili mogłoby się wydawać, że (roczna) stopa zwrotu powinna być średnią arytmetyczną czyli, że powinna wynosić 10%. Otóż tak nie jest. Roczna stopa zwrotu z tej inwestycji wynosi

$$k = \left(\frac{FV}{PV}\right)^{1/T} - 1 = \left(\frac{120{,}96}{100{,}00}\right)^{1/2} - 1 = 9{,}982\%$$

Natomiast w kapitalizacji ciągłej wartość przyszła wynosi

$$FV = 100 \cdot e^{0{,}08 \cdot 1} \cdot e^{0{,}12 \cdot 1} = 122{,}14$$

Aby policzyć roczną stopę zwrotu k porównajmy

$$100 \cdot e^{2 \cdot k} = 100 \cdot e^{0{,}08 \cdot 1 + 0{,}12 \cdot 1}$$

co oznacza, że roczna stopa zwrotu k wynosi 10%. □

Ogólnie, możemy stwierdzić, że w przypadku kapitalizacji złożonej roczna stopa zwrotu jest średnią geometryczną stóp zwrotu w okresach odsetkowych, czyli

$$k = [(1 + r(t_1)/m)(1 + r(t_2)/m) \cdots (1 + r(t_n)/m)]^{1/n} \tag{1.14}$$

Natomiast w przypadku kapitalizacji ciągłej, roczna stopa zwrotu jest średnią arytmetyczną, czyli

$$k = \frac{r(t_1) + r(t_2) + \cdots + r(t_n)}{n} \tag{1.15}$$

gdzie $r(t_i)$, dla $1 \leqslant i \leqslant n$ to stopa procentowa obowiązująca w $i-$tym podokresie, n liczba podokresów.

Przy kapitalizacji ciągłej wzór na dzisiejszą wartość PV kwoty FV danej w chwili T ma postać

$$PV = FV\mathrm{e}^{-rT}. \tag{1.16}$$

Będziemy potrzebować odpowiedzi na ogólniejsze pytanie: ile wynosi wartość w chwili $t < T$ kwoty FV danej w chwili T. Wtedy mamy do czynienia z okresem długości $T-t$, więc kwota PV dana w chwili t przy kapitalizacji ciągłej ma w chwili T wartość

$$FV = PV\mathrm{e}^{r(T-t)}.$$

Stąd wyliczając PV uzyskujemy odpowiedź na nasze pytanie:

$$PV = FV\mathrm{e}^{-r(T-t)}. \tag{1.17}$$

Uwaga Zauważmy, że różniczkując funkcję $FV(t) = PV\mathrm{e}^{rt}$ względem t dostaniemy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}FV(t) = rPV\mathrm{e}^{rt}$$

zatem spełnione jest równanie

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}FV(t) = r \cdot FV(t) \tag{1.18}$$

z warunkiem $FV(0) = PV$.

Podamy inne wyprowadzenie równości (1.13) oraz (1.18), aby pokazać jak różne podejścia się przenikają. Ustalamy $t > 0$ i obliczamy wartość oszczędności w chwili $t + h$ mając dane $FV(t)$ i używając wzoru (1.1) dla kapitalizacji prostej, co jest uzasadnione tym, że mamy na myśli krótki okres czasu h:

$$FV(t + h) = FV(t)(1 + rh).$$

Stąd po prostych przekształceniach dostajemy

$$\frac{FV(t + h) - FV(t)}{h} = rFV(t).$$

Gdy h zmierza do 0, to wtedy iloraz różnicowy z lewej strony zmierza do pochodnej funkcji $FV(\cdot)$ w punkcie t co daje (1.18). Jak łatwo sprawdzić, funkcja dana wzorem (1.13) spełnia to równanie.

1.4. Porównywanie stóp: efekt kapitalizacji

Jak wspomnieliśmy, stopy procentowe podaje się w skali roku, zatem powstaje naturalna potrzeba porównania efektywności inwestycji przy różnych metodach kapitalizacji. Zwykle stopy procentowe podawane są w skali rocznej (*annual percentage rate APR*) wraz z informacją w jaki sposób są dopisywane (składane) odsetki, czyli ile mamy okresów odsetkowych w roku.

Przykład 1.12 Pewien bank oferuje roczną lokatę oprocentowaną 6% w skali roku z kapitalizacją półroczną. Jeśli zainwestujemy 10 000 zł, to jaką kwotą będziemy dysponować pod koniec roku? Jakie musiałoby być oprocentowanie lokaty w kapitalizacji rocznej abyśmy uzyskali ten sam efekt?

Podana stawka 6% nie jest stawką oprocentowania w okresie roku. Służy ona tylko do wyznaczenia oprocentowania w okresach półrocznych

$$\frac{APR}{m} = \frac{6\%}{2} = 3\%$$

Zatem jeśli zainwestujemy 10 000 zł to po roku uzyskamy

$$10\,000 \cdot (1 + 6\%/2) \cdot (1 + 6\%/2) = 10\,000 \cdot (1 + 6\%/2)^2 = 10\,609$$

W drugim okresie odsetkowym, zarabiamy dodatkowo na odsetkach z pierwszego okresu.

Aby uzyskać kwotę 10 609 zł pod koniec roku, musielibyśmy zainwestować po stopie 6,09%, bo

$$10\,000 \cdot (1 + 6{,}09) = 10\,609$$

co oznacza, że

$$1 + 6{,}09 = (1 + 6\%/2)^2$$

i mamy odpowiedź jaka musi być równoważna stopa roczna.

Oznaczmy przez r_m stopę procentową odpowiadającą $m-$krotnej kapitalizacji. **Efektywna stopa procentowa** r_e (*effective annual rate EAR*) to równoważna stopa procentowa, gdyby kapitalizacja następowała tylko raz w roku. Mamy zatem warunek

$$1 + r_e = \left(1 + \frac{r_m}{m}\right)^m$$

czyli

$$r_e = \left(1 + \frac{r_m}{m}\right)^m - 1 \tag{1.19}$$

Zwykle w literaturze przedmiotu mamy zapis

$$EAR = \left(1 + \frac{APR}{m}\right)^m - 1$$

Przykład 1.13 Załóżmy, że pani Kowalska chciałaby założyć lokatę bankową. Poprosiła o ofertę kilka banków i otrzymała następujące propozycje:

Bank A: 8,75% przy kapitalizacji rocznej
Bank B: 8,65% kapitalizacji kwartalnej
Bank C: 8,55% kapitalizacji miesięcznej
Bank D: 8,45% kapitalizacji dziennej

Który bank oferuje najlepsze warunki lokaty?
Gdy podstawimy propozycje podane przez banki do zależności (1.19) uzyskamy:

Bank A:
$$r_e = \left(1 + \frac{0{,}0875}{1}\right)^1 - 1 = 8{,}75\%$$

Bank B:
$$r_e = \left(1 + \frac{0{,}0865}{4}\right)^4 - 1 = 8{,}93\%$$

Bank C:
$$r_e = \left(1 + \frac{0{,}0855}{12}\right)^{12} - 1 = 8{,}89\%$$

Bank D:
$$r_e = \left(1 + \frac{0{,}0845}{365}\right)^{365} - 1 = 8{,}82\%$$

Pani Kowalska powinna wybrać ofertę banku B. □

Zauważmy, że jeśli chcielibyśmy odpowiedzieć na pytanie jaki jest warunek aby stopa w kapitalizacji m_1-krotnej była równoważna stopie w kapitalizacji m_2-krotnej. Odpowiedź uzyskujemy przez porównanie z kapitalizacją roczną (czyli stopą efektywną)

$$\left(1 + \frac{r_{m_1}}{m_1}\right)^{m_1} = \left(1 + \frac{r_{m_2}}{m_2}\right)^{m_2} \tag{1.20}$$

i w konsekwencji mamy zależność

$$r_{m_2} = m_2\left(\left(1 + \frac{r_{m_1}}{m_1}\right)^{m_1/m_2} - 1\right) \tag{1.21}$$

Przykład 1.14 Załóżmy, że mamy do wyboru lokatę roczną oprocentowaną w wysokości 8% w kapitalizacji półrocznej. Jaka jest wysokość równoważnej lokaty w kapitalizacji kwartalnej?

Przyjmijmy $m_1 = 2$, $m_2 = 4$, $r_{m_1} = 8\%$. Szukamy r_{m_2} ze wzoru (1.21)

$$r_{m_2} = 4 \cdot \left(\left(1 + \frac{0{,}08}{2}\right)^{2/4} - 1\right) = 7{,}92\%$$

□

Wreszcie oznaczmy przez r_c stopę odpowiadającą kapitalizacji ciągłej. Jest ona równoważna stopie r_1 z kapitalizacją roczną

$$\mathrm{e}^{r_c} = 1 + r_1 \tag{1.22}$$

i stąd

$$r_c = \ln(1 + r_1) \tag{1.23}$$

W przypadku kapitalizacji $m-$krotnej mamy zależność pomiędzy stopami w kapitalizacji ciągłej i złożonej

$$\mathrm{e}^{r_c} = \left(1 + \frac{r_m}{m}\right)^m \tag{1.24}$$

czyli

$$r_c = \ln\left(1 + \frac{r_m}{m}\right)^m = m \ln\left(1 + \frac{r_m}{m}\right) \tag{1.25}$$

bądź równoważnie

$$r_m = m(\mathrm{e}^{r_c/m} - 1) \tag{1.26}$$

Weźmy inny przykład.

Przykład 1.15 Inwestor stosuje następującą strategię: kupuje 13 tygodniowy bon skarbowy na przetargu, trzyma go do wykupu i uzyskane środki znów reinwestuje w takie same bony. Jaką uzyska stopę zwrotu, jeśli na każdym przetargu taki bon kosztuje 98,28% wartości nominalnej, a horyzont inwestycyjny to 1 rok?
Mamy zatem w pierwszych 13 tygodniach $FV = 100$, $PV = 98{,}28$, $T = \frac{13}{52}$. Rentowność r tego bonu

$$r = \frac{1}{T}\frac{100{,}0 - 98{,}28}{98{,}28} = 7{,}00\%$$

Jeśli inwestor kupuje kolejne bony na przetargu przy rentowności 7%, to mamy analogiczną sytuację jak w przypadku kwartalnej kapitalizacji odsetek. Stąd efektywna stopa zwrotu z takiej strategii wynosi

$$r_e = \left(1 + \frac{0{,}07}{4}\right)^4 - 1 = 7{,}186\%$$

□

Zestawmy wartości czynnika stopy procentowej oraz stopy efektywnej dla kapitalizacji złożonej i ciągłej przy założeniu, że stopa procentowa $r =$10% i mamy roczny horyzont inwestycyjny (tab. 1.3). Widzimy, dla inwestora praktycznie nie ma różnicy pomiędzy kapitalizacją dzienną a ciągłą.

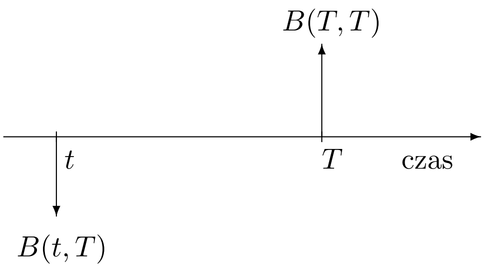
Zestawimy jeszcze w tabeli stopy równoważne stopie $r_{m_1} =$10%.

1.5. Stopa spot

Ceny papierów dłużnych implikują stopy procentowe. Widzieliśmy już wcześniej, że rentowność papieru dłużnego jest związana z jego ceną. Wiemy, że jeśli ceny papierów rosną to rentowności (implikowane stopy) spadają i odwrotnie.
Wprowadzimy teraz kolejny instrument dyskontowy, który generuje w czasie swojego życia generuje 1 przepływ gotówkowy rynku finansowego. Przez obligację 0-kuponową

Tabela 1.3. Wartości czynnika stopy procentowej oraz stopy efektywnej przy r =10% dla różnych kapitalizacji.

Kapitalizacja	czynnik stopy procentowej		stopa efektywna r_e
roczna	$(1+r)$	1,100000	10,00%
półroczna	$(1+\frac{r}{2})^2$	1,102500	10,25%
kwartalna	$(1+\frac{r}{4})^4$	1,103813	10,38%
miesięczna	$(1+\frac{r}{12})^{12}$	1,104713	10,47%
dzienna	$(1+\frac{r}{365})^{365}$	1,105156	10,52%
ciągła	$e^{r\cdot 1}$	1,105171	10,52%



Rysunek 1.5. Przepływy gotówkowe w obligacji 0-kuponowej

(*zero-coupon bond* lub *zeros*) z terminem do wykupu w chwili T rozumiemy zobowiązanie wystawione w chwili 0 przez emitenta obligacji, które zobowiązuje go wypłacić nabywcy obligacji (obligatariuszowi) jej wartość nominalną F (*face value* lub *nominal value*) w dniu zapadalności T. W dalszej części będziemy zakładać, że obligacje nie posiadają ryzyka kredytowego.

Od tego momentu będziemy oznaczać cenę obligacji 0-kuponowej przez B i dla podkreślenia daty kwotowania t i daty zapadalności T często będziemy dodawać argumenty $B(t,T)$. Zakładamy, że obligacja nie ma ryzyka kredytowego i w dniu zapadalności T wypłaca nominał (*face value* F).

Oczywiście, mamy zależność $B(T,T)=F$.

Uwaga W literaturze przedmiotu często zakłada się, że obligacja wypłaca w dniu zapadalności wypłaca 1 co oznacza, że $B(T,T)=1$.

Tabela 1.4. Stopy równoważne stopie $r_{m_1} = 10\%$; w wierszach częstotliwość kapitalizacji m_1, w kolumnach m_2.

	1	2	4	12	365	cg
1	8,00%	7,85%	7,77%	7,72%	7,70%	7,70%
2	8,16%	8,00%	7,92%	7,87%	7,84%	7,84%
4	8,24%	8,08%	8,00%	7,95%	7,92%	7,92%
12	8,30%	8,13%	8,05%	8,00%	7,97%	7,97%
365	8,33%	8,16%	8,08%	8,03%	8,00%	8,00%
cg	8,33%	8,16%	8,08%	8,03%	8,00%	8,00%

Czasem, jeśli nie będzie konfliktu, będziemy dla uproszczenia zapisu stosować notację $B(0,T) = B(T)$. Zauważmy, że zachodzi zależność pomiędzy ceną dzisiaj a ceną nominalną

$$B(0,T) = \frac{1}{(1+r(T))^T} F \tag{1.27}$$

i stąd mamy rentowność obligacji

$$r(T) = \left(\frac{F}{B(0,T)}\right)^{1/T} - 1 \tag{1.28}$$

Tak zdefiniowaną stopę procentową $r(T)$ będziemy nazywać T-letnią **stopą spot**.

Stopy spot są podstawowymi stopami procentowymi określającymi strukturę terminową. T-letnia stopa spot $r(T)$ jest stopą procentową, określającą stopę zwrotu z inwestycji rozpoczętej dzisiaj a zakończonej w roku T.

Przykład 1.16 Na rynku jest kwotowana 2-letnia obligacja 0-kuponowa. Jej cena B wynosi $B(0,2) = 88{,}0\%$ wartości nominalnej. Stąd cena dziś jest dyskontowana stopą $r(2)$

$$88{,}0 = \frac{100}{(1+r(2))^2}$$

Zatem 2-letnia stopa spot $r(2)$ tej obligacji wynosi

$$r(2) = \left(\frac{100}{88}\right)^{1/2} - 1 = 6{,}60\%$$

□

Podobnie jak wcześniej, możemy związać, ze stopą spot czynniki dyskontowe

$$DF(T) = \frac{1}{(1+r(T))^T} \tag{1.29}$$

Podajmy może formalną definicję czynnika dyskontowego DF.

Definicja 1.1 *Czynnik dyskontowy $DF(t_0, T)$ w chwili t_0 dla okresu czasu $T - t_0$ to wartość obecna (w chwili t_0) przepływu pieniężnego w chwili T o nominale 1.*

Dla uproszczenia notacji nie będziemy zaznaczać *explicite* zależności czynnika dyskontowego od chwili t_0 i będziemy pisać

$$DF(T) \quad \text{zamiast} \quad DF(t_0, T).$$

Wartość czynnika dyskontowego można utożsamiać z ceną w chwili t_0 *obligacji 0-kuponowej* o nominale 1 i czasie zapadalności (trwania) T.

Definicja 1.2 *Obligacji 0-kuponowej, wyznaczonej przez czynnik dyskontowy $DF(T)$, odpowiada zerokuponowa stopa procentowa $r(T)$ określona następującą zależnością*

$$DF(T) = \frac{1}{(1 + r(T))^T} \tag{1.30}$$

lub wprost

$$r(T) = \frac{1}{DF(T)^{1/T}} - 1 = DF(T)^{-1/T} - 1,$$

gdzie okres czasu $T - t_0$ w (1.30) *jest liczony według właściwej konwencji obliczania liczby dni pomiędzy chwilą t_0 a T i względem bazy roku odpowiedniej dla stosowanej konwencji.*

Zauważmy, że stopa spot $r(T)$ to inaczej stopa dyskontowa obligacji 0-kuponowej. Możemy powiązać teraz cenę obligacji 0-kuponowej z czynnikiem dyskonta

$$B(T) = DF(T)F \tag{1.31}$$

Czynnik dyskontowy to cena obligacji 0-kuponowej dla ceny nominalnej F=1.

Zauważmy również że dla różnych konwencji kapitalizacji zależności określające stopę spot będą miały postać:

- dla kapitalizacji złożonej m-krotnej

$$DF_m(T) = \frac{1}{(1 + r(T)/m)^{mT}} = \frac{B(T)}{F} \tag{1.32}$$

  a stąd stopa spot

$$r(T) = m\left(\frac{1}{DF_m(T)^{1/mT}} - 1\right) \tag{1.33}$$

- dla kapitalizacji ciągłej

$$DF_c(T) = \mathrm{e}^{-r(T)T} \tag{1.34}$$

  a stąd stopa spot

$$r(T) = -\frac{\ln DF_c(T)}{T} = -\frac{1}{T}\ln\frac{B(T)}{F} = \frac{\ln F - \ln B(T)}{T} \tag{1.35}$$

1.6. Stopa forward

Do tej pory skupiliśmy się na stopach procentowych które obowiązywały pomiędzy chwila dzisiejszą t=0 i chwilą w przyszłości t=T. Zajmijmy się teraz przypadkiem gdy mamy chcemy wyznaczyć stopę transakcji pomiędzy chwilami t_1 oraz t_2 w przyszłości.

Przykład 1.17 Mamy do zainwestowania 100 zł na 9 miesięcy, przy czym możemy to zrobić na dwa sposoby

możliwość A: inwestujemy na okres 9 miesięcy po stopie 8% p.a.

możliwość B: inwestujemy na okres 6 miesięcy po stopie 7% i to co uzyskamy reinwestujemy na 3 miesiące po stopie f

Obie możliwości inwestycyjne trwają 9 miesięcy. Powstaje naturalne pytanie jaka powinna być stopa f aby obie możliwości dawały ten sam wynik?

Spróbujmy odpowiedzieć na to pytanie.

możliwość A: daje nam po 9 miesiącach

$$FV_A = 100 \cdot (1 + 0{,}08 \cdot 9/12) = 106{,}00 \text{ zł}$$

możliwość B: daje nam po 6 miesiącach

$$FV_{B_1} = 100 \cdot (1 + 0{,}07 \cdot 6/12) = 103{,}50 \text{ zł}$$

reinwestując otrzymaną kwotę po stopie f na okres 3 miesięcy dostaniemy

$$FV_B = FV_{B_1} \cdot (1 + f \cdot 3/12) = 103{,}50 \cdot (1 + f \cdot 3/12)$$

Aby obie inwestycje dawały ten sam wynik musi zachodzić równość

$$FV_A = FV_B$$

czyli

$$105{,}00 = 103{,}50 \cdot (1 + f \cdot 3/12)$$

stąd $f = 9{,}6618\%$.

Moglibyśmy powiedzieć, że **brak możliwości arbitrażu** implikuje równość. □

W przykładzie korzystaliśmy z zależności na równość czynników wzrostu na rynku pieniężnym

$$\Big(1 + r(t_2)t_2\Big) = \Big(1 + r(t_1)t_1\Big)\Big(1 + f(t_2 - t_1)\Big) \tag{1.36}$$

i stąd

$$f = \left(\frac{1 + r(t_2)t_2}{1 + r(t_1)t_1} - 1\right)\frac{1}{t_2 - t_1}$$

gdzie:

t_1 oznacza krótszy czas inwestycji,

t_2 oznacza dłuższy czas inwestycji,

$r(t_1)$ oznacza stopę procentową (stopę spot) w krótszym okresie,

$r(t_2)$ oznacza stopę procentową (stopę spot) w dłuższym okresie.

Postawmy formalną definicję stopy forward.

Definicja 1.3 *Stopę forward $f(t_i, t_{i+1})$ w chwili t_0 na okres od t_i do t_{i+1} to stopa procentowa implikowana przez stopy spot $r(t_i)$ oraz $r(t_{i+1})$.*

W dalszym ciągu stopę f będziemy oznaczać $f(t_1, t_2)$ i nazywać stopą forward startującą w chwili t_1 i kończącą się w chwili t_2, przy czym warunki transakcji są ustalane dzisiaj (czyli w chwili 0). Często dla podkreślenia tego faktu stosuje się notację $f(t_0, t_1, t_2)$, gdzie t_0 oznacza datę zawarcia transakcji.

Zauważamy, że stopa forward jest wyznaczona jednoznacznie. To jest bardzo ważna obserwacja. Gdyby tak nie było zachodziłaby możliwość arbitrażu.

Przykład 1.18 Mamy możliwości inwestycyjne takie jak w przykładzie (1.17). Załóżmy jednak teraz, że stopa forward wynosi 11%. Jakiej można dokonać transakcji arbitrażowej? Przyjmijmy też dodatkowo, że cena depozytu i kredytu jest taka sama tzn. bid-ask spread jest równy 0.

Arbitrażysta zajmuje długą pozycję w aktywach które są tanie i równocześnie przeciwstawną pozycję w aktywach które są drogie. W rozważanym przypadku powinien zadłużać się na rynku gdzie może tanio pozyskać środki i ulokować drogo. Czyli powinien pożyczyć na środki na 9 miesięcy po stopie 8% i ulokować je na 6 miesięcy po stopie 7% oraz odnowić lokatę na 3 miesiące po stopie 11%. Zyskiem arbitrażowym będzie różnica 11%-9,6618%, czyli 1,34%. Jeśli przykładowo, inwestor pożyczy 1 mln zł to jego zysk arbitrażowy wyniesie:

$$1{,}3382\% \cdot 1 \text{ mln zł} = 13\,381{,}64 \text{ zł}$$

W założonej sytuacji rynkowej zysk zależy od kwoty jaką może zainwestować arbitrażysta. □

Uwaga 1 W praktyce na rynku pieniężnym inwestorzy korzystają z zależności

$$\left(1 + r(t_2) \times \frac{t_2}{365 \text{ dni}}\right) = \left(1 + r(t_1) \times \frac{t_1}{365 \text{ dni}}\right) \times \left(1 + f \times \frac{t_2 - t_1}{365 \text{ dni}}\right)$$

zatem

$$f = \left(\frac{1 + r(t_2) \times \frac{t_2}{365}}{1 + r(t_1) \times \frac{t_1}{365}} - 1\right) \times \frac{365}{t_2 - t_1}$$

gdzie:
t_1 oznacza krótszy czas inwestycji,
t_2 oznacza dłuższy czas inwestycji,
$r(t_1)$ oznacza stopę procentową (stopę spot) w krótszym okresie,
$r(t_2)$ oznacza stopę procentową (stopę spot) w dłuższym okresie.

Uwaga 2 W naszym przykładzie wyznaczyliśmy stopę $f(\frac{1}{2}, \frac{3}{4})$. W praktyce rynkowej jest to cena kontraktu FRA6x9.

Patrząc na przedstawioną w przykładzie stopę forward zaczynającą się za 6 miesięcy i trwającą 3 miesiące to, uświadamiamy sobie, że tak naprawdę określiliśmy instrument pochodny. Jest to kontrakt FRA (*Forward Rate Agreement*). W naszym

przypadku jest to FRA6×9 w której ustalamy wysokość 3 miesięcznej stopy procentowej, zaczynającej się za 6 miesięcy od dzisiaj.
Aby określić transakcję FRA musimy podać:
– stopę forward,
– tzw. datę FRA,
– stawkę referencyjną,
– datę fixingu.
Przykładowo przedmiotem transakcji może być 6M WIBOR za 3 miesiące, czyli FRA3×9 (pierwsza liczba określa początek okresu, a różnica 9-3 przedmiot transakcji: 6M WIBOR).
Nabywca FRA uważa, że za 3 miesiące 6M WIBOR będzie powyżej stopy forward. W dacie fixingu czyli za 3 miesiące nastąpi porównanie rynkowego (ustalanego o godzinie 11.00) 6M WIBORu i stopy forward.

Rynek FRA rozwinął się dzięki FX (*Foreign eXchange*) swapom. Instrumenty te generowały często niezabezpieczoną pozycję.
Przykładowo, bank transakcję 6M zabezpiecza transakcją 3M czyli powstaje niedopasowanie 3×6. Niedopasowanie może być zamknięte kontraktem FRA 3×6.
Prześledźmy działania banku:
kupuje 6M FX swapa (*sell spot, buy 6M forward*),
sprzedaje 3M FX swapa (*buy spot, sell 3M forward*)
i zamyka niedopasowanie sprzedając FRA 3×6. [4]

Podobnie jak dla stopy *spot*, możemy wyznaczyć dla stopy *forward* **terminowy czynnik dyskontowy** $DF(t_1, t_2)$ następująco:

$$DF(t_1, t_2) = \frac{1}{1 + f(t_1, t_2)(t_2 - t_1)} \tag{1.37}$$

Zauważmy, że zależność (1.36) możemy wyrazić również w języku czynników dyskontowych

$$DF(t_1, t_2) = DF(t_2) DF^{-1}(t_1)$$

Stopa forward w modelu kapitalizacji złożonej Pokażemy teraz, jak zdefiniować stopę forward w kapitalizacji złożonej, dla dowolnej liczby okresów odsetkowych m. Dla inwestycji powyżej roku, dla modelu kapitalizacji złożonej (m okresów na rok), $i < j$ porównajmy czynniki wzrostu

$$\left(1 + \frac{r(j)}{m}\right)^{j \cdot m} = \left(1 + \frac{r(i)}{m}\right)^{i \cdot m} \left(1 + \frac{f(i,j)}{m}\right)^{(j-i) \cdot m} \tag{1.38}$$

[4] Więcej na temat transakcji FRA oraz transakcji swapowych można znaleźć w bardzo ciekawym artykule na temat transakcji swapowych: L. Krawczyk, ...

skąd stopa forward

$$f(i,j) = m\left[\frac{(1+r(j)/m)^{jm}}{(1+r(i)/m)^{i\cdot m}}\right]^{\frac{1}{(j-i)\cdot m}} - m \tag{1.39}$$

W szczególności dla $m = 1$ mamy

$$\Big(1+r(j)\Big)^{j} = \Big(1+r(i)\Big)^{i}\Big(1+f(i,j)\Big)^{(j-i)} \tag{1.40}$$

zatem stopa *forward*

$$f(i,j) = \left[\frac{(1+r(j))^{j}}{(1+r(i))^{i}}\right]^{\frac{1}{j-i}} - 1 \tag{1.41}$$

Często, jeśli nie ma kolizji oznaczeń stosuje się notację $r(1)$ zamiast $r(t_1)$, mając na myśli roczną stopę spot.

Podobnie jak wcześniej możemy również zdefiniować terminowy czynnik dyskontowy dla modelu kapitalizacji złożonej. Weźmy dowolne m, wtedy terminowy czynnik dyskontowy

$$DF_m(t_1,t_2) = \frac{1}{\Big(1+f(t_1,t_2)/m\Big)^{m(t_2-t_1)}} \tag{1.42}$$

Zauważmy, że możemy wyrazić relację pomiędzy stopami spot a stopą forward w języku czynników dyskontowych

$$DF(t_1,t_2) = DF(t_2)DF^{-1}(t_1) \tag{1.43}$$

Przyjrzyjmy się bliżej relacji pomiędzy stopami forward a stopami spot. Weźmy zależność (1.40). Dla i =1 oraz $j = 2$ mamy

$$\big(1+r(2)\big)^2 = \big(1+r(1)\big)\big(1+f(1,2)\big)^{(2-1)} \tag{1.44}$$

a dla $i = 2$ oraz $j = 3$

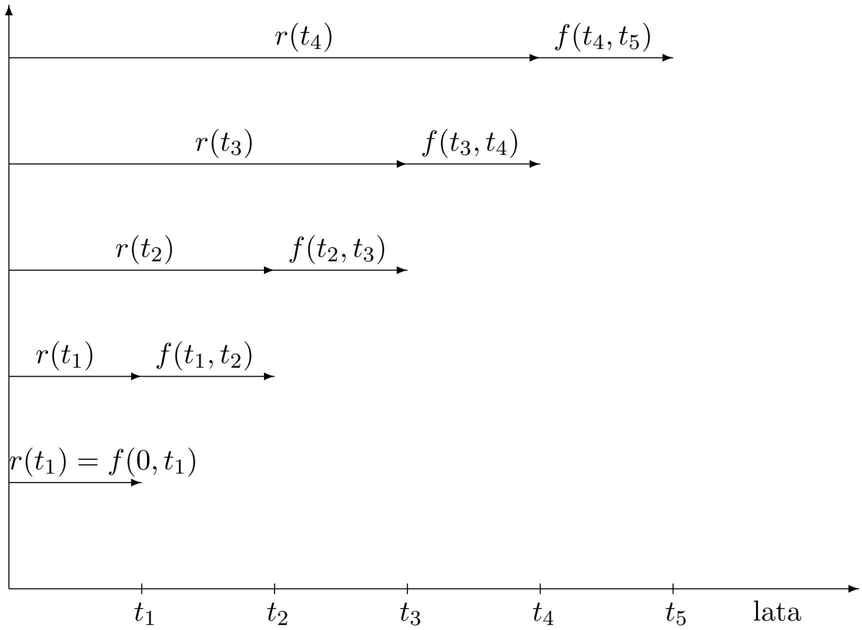
$$\big(1+r(3)\big)^3 = \big(1+r(2)\big)^2\big(1+f(2,3)\big)^{(3-2)} \tag{1.45}$$

Podstawmy zależność (1.44) do (1.45) i dostajemy

$$\big(1+r(3)\big)^3 = \big(1+r(1)\big)\big(1+f(1,2)\big)\big(1+f(2,3)\big) \tag{1.46}$$

Jeśli dodatkowo oznaczymy roczną stopę spot $r(1)$ jako stopę forward startującą dziś i kończącą się za rok $f(0,1)$ to uzyskamy

$$\big(1+r(3)\big)^3 = \big(1+f(0,1)\big)\big(1+f(1,2)\big)\big(1+f(2,3)\big) \tag{1.47}$$



Rysunek 1.6. Stopy spot i roczne stopy forward

Widzimy, że 3-letnią stopę spot $r(3)$ możemy wyrazić poprzez roczne stopy forward $f(0,1)$, $f(1,2)$ oraz $f(2,3)$.

Powtarzając rozumowanie, $k-$letnia stopę spot można wyrazić poprzez roczne stopy forward

$$\Big(1 + r(k)\Big)^k = \Big(1 + f(0,1)\Big)\big(1 + f(1,2)\Big) \cdots \Big(1 + f(k-1,k)\Big) \tag{1.48}$$

Widzimy, że $k-$letnia stopa spot jest średnią geometryczną rocznych stóp forward $f(0,1), f(1,2), \ldots f(k-1,k)$.

Zauważmy, że stopę forward można też zdefiniować w języku cen obligacji 0-kuponowych. Zapiszmy zależność (1.40) dla $j = k$ oraz $i = k - 1$, wtedy dostaniemy

$$\Bigg(1 + r(k)\Bigg)^k = \Bigg(1 + r(k-1)\Bigg)^{k-1}\Bigg(1 + f(k-1,k)\Bigg) \tag{1.49}$$

i stopę forward możemy wyrazić za pomocą cen obligacji 0-kuponowych $B(k-1)$ oraz $B(k)$

$$f(k-1,k) = \frac{\Big(1 + r(k)\Big)^k}{\Big(1 + r(k-1)\Big)^{k-1}} - 1 = \frac{B(k-1)}{B(k)} - 1 \tag{1.50}$$

Oczywiście ostatnią zależność można również wyrazić w języku czynników dyskontowych

$$f(k-1,k) = \frac{DF(k-1)}{DF(k)} - 1 = DF^{-1}(k-1,k) - 1 \tag{1.51}$$

Spróbujmy skorzystać z tych obserwacji w następującym przykładzie.

Przykład 1.19 Załóżmy, że rynek kwotuje ceny obligacji 0-kuponowych następująco

t	1	2	3	4
B(0,t)	0,9512	0,8976	0,8323	0,7629

Wszystkie obligacje mają wartość nominalną równą 1 mln zł. Klient banku chciałby pożyczyć 10 mln zł na rok za 3 lata od dzisiaj. Czy bank może zagwarantować mu stopę procentową takiej pożyczki?

Aby dać odpowiedź klientowi, bank powinien zastosować następującą strategię:

- kupić 10 obligacji 3-letnich, które kosztują

$$10\,000\,000 \cdot 0,8323 = 8\,323\,000$$

- sfinansować ten zakup sprzedażą 4-letnich obligacji w kwocie 8 323 000 zł i wartości nominalnej

$$8\,323\,000/0,7629 = 10\,909\,687$$

- ta strategia spowoduje zobowiązanie za 4 lata w wysokości 10 909 687 zł.

Przepływy gotówkowe z tej strategii wyglądają następująco:

rok	0	1	2	3	4
kupno 3-letniej obligacji	-8 323 000	0	0	10 000 000	0
sprzedaż 4-letniej obligacji	8 323 000	0	0	0	-10 909 697
suma	0	0	0	10 000 000	-10 909 697

Z punktu widzenia banku mamy przepływy pod koniec 3 oraz 4 roku. Rentowność takiego instrumentu wynosi

$$\frac{10\,909\,697}{10\,000\,000} - 1 = 9{,}0969\%$$

i to jest szukana stopa forward.

Oczywiście stopę forward $f(3,4)$ możemy policzyć ze stóp spot. Stopy spot implikowane przed ceny obligacji 0-kuponowych wynoszą odpowiednio:

$$\begin{aligned} r(1) &= B(1)^{-1/1} - 1 &= 5,130\% \\ r(2) &= B(2)^{-1/2} - 1 &= 5,550\% \\ r(3) &= B(3)^{-1/3} - 1 &= 6,310\% \\ r(4) &= B(4)^{-1/4} - 1 &= 7,000\% \end{aligned}$$

i stąd stopa forward $f(3,4)$

$$f(3,4) = \frac{(1+r(4))^4}{(1+r(3))^3} - 1 = 9{,}0969\%$$

□

Dla dowolnego m mamy zależność pomiędzy stopami spot i forward

$$\left(1+\frac{r(t_j)}{m}\right)^{mt_j} = \left(1+\frac{r(t_i)}{m}\right)^{mt_i}\left(1+\frac{f(t_i,t_j)}{m}\right)^{m(t_j-t_i)} \tag{1.52}$$

i w języku cen obligacji 0-kuponowych

$$\frac{1}{B(t_j)} = \frac{1}{B(t_i)}\left(1+\frac{f(t_i,t_j)}{m}\right)^{m(t_j-t_i)} \tag{1.53}$$

co w konsekwencji prowadzi do zależności

$$f(t_i,t_j) = m\left(\left(\frac{B(t_i)}{B(t_j)}\right)^{\frac{1}{m(t_j-t_i)}} - 1\right) \tag{1.54}$$

Stopa forward w modelu kapitalizacji ciągłej Zobaczmy teraz jaka jest zależność na stopę forward w modelu kapitalizacji ciągłej. Porównajmy odpowiednie czynniki wzrostu

$$e^{r(t_1)\cdot t_1} \cdot e^{f\cdot(t_2-t_1)} = e^{r(t_2)\cdot t_2} \tag{1.55}$$

gdzie:
$r(t_1)$ - stopa *spot* inwestycji zapadającej w chwili t_1
$r(t_2)$ - stopa *spot* inwestycji zapadającej w chwili t_2, przy czym $t_1 < t_2$
f - stopa *forward* dla inwestycji w okresie czasu pomiędzy t_1 a t_2.
Z zależności (1.55) dostajemy

$$r(t_1)\cdot t_1 + f\cdot(t_2-t_1) = r(t_2)\cdot t_2$$

i ostatecznie

$$f = f(t_1,t_2) = \frac{r(t_2)\cdot t_2 - r(t_1)\cdot t_1}{t_2-t_1} \tag{1.56}$$

i w cen obligacji 0-kuponowych i czynników dyskontowych

$$f = \frac{1}{t_2-t_1}\ln\left(\frac{DF(t_1)}{DF(t_2)}\right) = \frac{1}{t_2-t_1}\ln\left(\frac{B(t_1)}{B(t_2)}\right) \tag{1.57}$$

Rozdział 2

Wartość pieniądza w czasie – strumień płatności

Dotychczas rozważaliśmy tylko takie sytuacje, w których występował dokładnie jeden przepływ gotówki w czasie. W rzeczywistości większość inwestycji obejmuje zwielokrotnione przepływy gotówkowe. Przykładowo na emeryturę musimy odkładać co miesiąc określoną kwotę pieniędzy. Teraz rozważymy sytuację gdy będzie więcej przepływów gotówkowych w trakcie inwestycji. Odpowiemy głównie na pytanie jaka jest wartość przyszła i wartość dzisiejsza takich przepływów.

2.1. Wartość dzisiejsza strumienia płatności

Zaczniemy od renty czyli strumienia (ciągu) równych płatności w czasie.

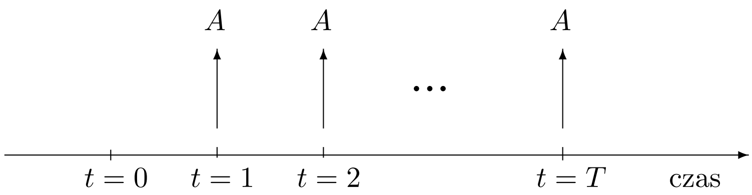
2.1.1. Renty

Renta to strumień przepływów pieniężnych następujących w ustalonych momentach w przyszłości. **Renta wieczysta** (*perpetuity*) oznacza nigdy nie ustający ciąg takich płatności, natomiast **renta okresowa** (*annuity*) obejmuje skończoną ich liczbę. Możemy wyróżnić rentę z płatnościami z góry (*annuity due*) i z płatnościami z dołu (*deferred annuity)*.

Przyjmujemy najpierw dla uproszczenia, że wypłaty odbywają się raz do roku, w równej wysokości A, przy czym pierwsza wypłata ma miejsce za rok od dzisiaj. Przyjmijmy stopę procentową r przy kapitalizacji rocznej.

Aby wyznaczyć wartość dzisiejszą takiej renty wieczystej PV musimy zdyskontować wszystkie płatności na dzień dzisiejszy. Pierwsza wypłata A będzie dyskontowana czynnikiem $(1+r)^{-1}$, druga wypłata A czynnikiem $(1+r)^{-2}$, etc. Zatem mamy następującą zależność

$$PV_1 = \frac{A}{1+r} + \frac{A}{(1+r)^2} + \frac{A}{(1+r)^3} + \cdots$$



Rysunek 2.1. Płatności z dołu w rencie okresowej

Widzimy, że jest to nieskończony ciąg geometryczny. Sumę takiego ciągu możemy wyznaczyć ze wzoru

$$\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} = \frac{a}{1-q}, \quad \text{przy założeniu } \mid q \mid < 1$$

gdzie w naszym przypadku $a = \frac{A}{1+r}$, $q = \frac{1}{1+r}$. Zatem

$$PV = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \frac{C}{(1+r)^3} + \cdots = \frac{C}{1+r}\frac{1}{1-\frac{1}{1+r}} = \frac{C}{r} \qquad (2.1)$$

Przykład 2.1 Chcemy otrzymywać bezterminowy (myślimy również o zabezpieczeniu naszych potomnych i ich potomnych) strumień 20 tys. zł rocznie. Jeśli stopa procentowa r wynosi 10%, to jaka jest wartość dzisiejsza takiej renty?
Korzystamy ze wzoru (2.1) i mamy $\frac{20}{0{,}1} = 200$ tys. zł. Jeśli mamy być beneficjentami takiego ciągu płatności to wcale nie jest to duża kwota. □

Weźmy bardziej praktyczny przypadek, czyli sytuację gdy mamy skończony strumień przepływów gotówkowych. Załóżmy, że mamy dwie renty wieczyste płatne z dołu: w pierwszej rencie pierwsza płatność następuje za rok a w drugiej za $T+1$ lat. Wtedy renta okresowa składająca się z T płatności z dołu

$$PV = \sum_{i=1}^{n} \frac{C}{(1+r)^i} = \frac{C}{1+r} + \frac{C}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{C}{(1+r)^T}$$

obliczamy jako różnicę dwóch rent wieczystych

$$PV = \frac{A}{r} - \frac{A}{r}\frac{1}{(1+r)^T} = \frac{A}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^T}\right) = A \cdot PVA(r,T),$$

gdzie

$$PVA(r,T) = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^T}\right)$$

oznacza czynnik renty okresowej ().

Przykład 2.2 Firma ubezpieczeniowa sprzedaje 20-letnią rentę okresową płatną w wysokości 12 tys. zł rocznie. Przypuśćmy, że stopa procentowa $r = 7\%$. Jaka powinna być cena takiej renty?

Obliczmy wartość dzisiejszą takiej renty

$$\begin{aligned} PV &= 12\,000 \cdot \frac{1}{0,07} \cdot \left(1 - \frac{1}{(1+0,07)^{20}}\right) \\ &= 12\,000 \cdot 10,594 = 127\,128 \text{ zł} \end{aligned}$$

□

Jeśli mamy rentę okresową o m płatnościach w roku w wysokości A/m każda, to wartość dzisiejsza T-letniej renty okresowej, będzie wyrażona zależnością

$$PV = \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{A}{m}}{(1+\frac{r}{m})^i} = \frac{\frac{A}{m}}{1+\frac{r}{m}} + \frac{\frac{A}{m}}{(1+\frac{r}{m})^2} + \cdots + \frac{\frac{A}{m}}{(1+\frac{r}{m})^n}$$

gdzie: liczba płatności $n = m \cdot T$. Skorzystajmy, ze wzoru na sumę skończonego szeregu geometrycznego

$$\sum_{k=1}^{n} aq^{k-1} = a\frac{1-q^n}{1-q}$$

gdzie w naszym przypadku $a = \frac{A/m}{1+r/m}$, $q = \frac{1}{1+r/m}$. Zatem

$$PV = \frac{A/m}{1+r/m}\frac{1-\frac{1}{(1+r/m)^n}}{1-\frac{1}{1+r/m}} = \frac{A}{m}\frac{m}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r/m)^n}\right) = \frac{A}{r}\left(1-\frac{1}{(1+r/m)^n}\right) \tag{2.2}$$

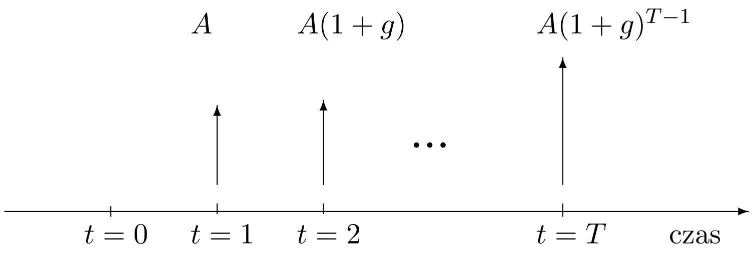
W przypadku częstszych płatności czynnik renty okresowej ma postać

$$PVA(r,T,m) = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r/m)^n}\right)$$

Załóżmy teraz, że mamy rentę okresową płatną z dołu, w której płatność rośnie co rok o stopę g.

Wartość dzisiejszą takiej renty możemy wyrazić następująco:

$$\begin{aligned} PV &= \frac{A}{1+r} + \frac{A(1+g)}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{A(1+g)^{T-1}}{(1+r)^T} \\ &= A\left[\frac{1}{1+r} + \frac{(1+g)}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{(1+g)^{T-1}}{(1+r)^T}\right] \\ &= A\begin{cases} \frac{1}{r-g}\left[1-\left(\frac{1+g}{1+r}\right)^T\right] & \text{jeśli } r \neq g \\ \frac{T}{1+r} & \text{jeśli } r = g \end{cases} \end{aligned} \tag{2.3}$$



Rysunek 2.2. Płatności z dołu w rencie okresowej ze wzrostem g

Zauważmy, że dla każdej rozważanej do tej pory renty wieczystej możemy wyznaczyć wartość przyszła mnożąc wartość dzisiejszą przez odpowiedni czynnik wzrostu. I tak dla płatności raz w roku mamy

$$FV = PV(1+r)^T = \frac{A}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^T}\right)\left(1+r\right)^T = \frac{A}{r}\left((1+r)^T - 1\right) \tag{2.4}$$

Przykład 2.3 Załóżmy, że chcemy oszczędzamy pieniądze na emeryturę. Załóżmy, że mamy teraz 25 lat i w wieku 65 lat chcemy przejść na emeryturę i mieć odłożone 1 mln zł. Mamy możliwość zwiększać co rok wpłaty na nasze konto emerytalne o 4%. Jaka powinna być pierwsza wpłata, jeśli stopa r=7%?

Policzmy najpierw wartość dzisiejszą takiej renty

$$PV = \frac{FV}{(1+r)^T} = \frac{2 \text{ mln zł}}{(1+0,07)^{40}} = 66\,780 \text{ zł}$$

Stąd możemy policzyć parametr A

$$A = PV\left(\frac{1}{r-g}\left[1 - \left(\frac{1+g}{1+r}\right)\right]\right)^{-1} = \frac{66\,780}{22,646} = 2\,948,86 \text{ zł}$$

Zatem musielibyśmy odłożyć w pierwszym roku 2 948,86 zł na poczet przyszłe emerytury. □

Rozważmy jeszcze inny przykład.

Przykład 2.4 [kredyt hipoteczny] Kupujemy dom za 600 tys. zł. Wpłacamy 25% kwoty, czyli 150 tys. zł a resztę czyli 450 tys. zł finansujemy kredytem hipotecznym, gdzie nabyty dom jest zabezpieczeniem. Załóżmy, że kredyt zaciągnęliśmy na 30 lat i będziemy spłacać miesięcznie stałą ratę (jako sumę raty kapitałowej i odsetkowej). Oprocentowanie kredytu jest stałe i wynosi 8%. Jaka jest wysokość takiej raty?

Oznaczmy przez M wysokość miesięcznej raty. Możemy z zależności na wartość dzisiejszą renty okresowej napisać

$$\begin{aligned} 450\,000 &= \sum_{i=1}^{360} \frac{M}{(1+(0,08/12))^i} \\ &= \frac{M}{(0,08/12)}\left(1-\frac{1}{(1+0,08/12)^{360}}\right) \\ &= M\frac{0,9086}{0,08/12} \end{aligned} \tag{2.5}$$

Stąd mamy miesięczną płatność w wysokości

$$M = 450\,000\frac{0,08/12}{0,9086} = 3\,301,94 \text{ zł}$$

Efektywna stopa procentowa EAR takiego kredytu to:

$$EAR = (1+0,08/12)^{12} - 1 = 8,30\%$$

□

Sposób spłaty kredytu przedstawiony w przykładzie to kredyt amortyzowany. Weźmy teraz jeszcze inny przykład.

Przykład 2.5 Załóżmy, że wygraliśmy na loterii specjalną nagrodę która płaci 80 tys. zł co rok przez najbliższe 10 lat. Czy możemy nazywać się milionerami? Przyjmijmy do obliczeń stopę r= 8%.

Obliczmy wartość dzisiejszą takiej renty

$$PV = A\frac{1}{r}\left(1-\frac{1}{(1+r)^T}\right) = 800\cdot\frac{1}{0,08}\cdot\left(1-\frac{1}{1,08^{10}}\right) = 536\,807 \text{ zł}$$

Nie możemy się nazywać milionerami. A gdybyśmy otrzymywali takie kwoty przez 25 lat

$$PV = 80\cdot\frac{1}{0,08}\cdot\left(1-\frac{1}{1,08^{25}}\right) = 853\,982 \text{ zł}$$

Wciąż dużo nam brakuje. Ale spróbujmy wydłużyć okres otrzymywania takiej kwoty do nieskończoności (nasz iloraz w nawiasie będzie dążył do 0) i wtedy

$$PV = 80\cdot\frac{1}{0,08}\cdot\Big(1-0\Big) = 1\,000\,000 \text{ zł}$$

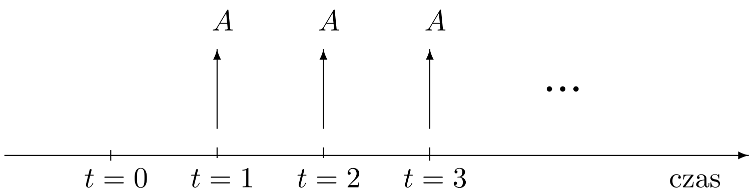
W końcu moglibyśmy nazywać się milionerami. Ale czy będziemy żyć wiecznie?:) □

W taki sposób otrzymaliśmy rentę wieczystą. Z punktu widzenia życia wydaje się to dziwna konstrukcja,[1] jednak w finansach ma bardzo duże znaczenie. Wartość dzisiejsza renty wieczystej jak pokazaliśmy już wcześniej wynosi

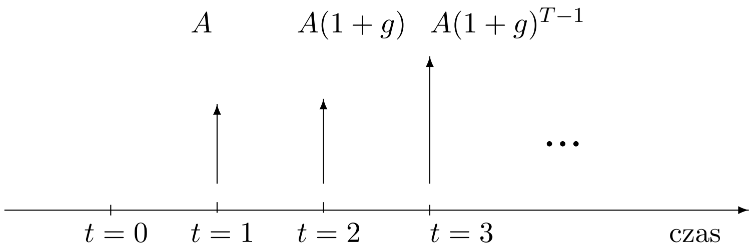
$$PV = A\frac{1}{r}$$

Pojęcie renty wieczystej ma fundamentalne znaczenie przy wycenie spółki.

[1] Jak mawiał J.M.Keynes, w długim okresie wszyscy będziemy martwi.



Rysunek 2.3. Przepływy gotówkowe w rencie wieczystej



Rysunek 2.4. Płatności w rencie wieczystej ze wzrostem g

Przykład 2.6 Spółka ABC wypłaci za rok dywidendę w wysokości 7 zł. Po dokładniejszej analizie okazuje się, że spółka jest w stanie zwiększać dywidendę o 6% każdego roku. Spółki o tej samej klasie ryzyka mają oczekiwaną stopę zwrotu na poziomie 11%. Czy możemy wyznaczyć cenę akcji takiej spółki?

Wyznaczmy wartość dzisiejszą takiego ciągu płatności dywidend

$$\begin{aligned} PV &= \frac{7}{1,11} + \frac{7 \cdot (1 + 0,06)}{1,11^2} + \frac{7 \cdot (1 + 0,06)^2}{1,11^3} + \cdots \\ &= \frac{7}{0,11 - 0,06} = 140 \text{ zł} \end{aligned} \tag{2.6}$$

□

Inne własności strumienia płatności pokażemy analizując wycenę obligacji.

2.2. Wartość przyszła ciągu płatności

Przypuśćmy, że dzisiaj deponujesz na rachunku bankowym 1000 zł na 10% w skali roku, a za rok zdeponujesz kolejne 1500 zł na 10%. Jaką kwota pieniędzy będziesz dysponował po 2 latach?

Zauważmy, że kwota 1000 zł pracuje przed 2 okresy odsetkowe. Na koniec pierwszego okresu odsetkowego 1000 zł da nam kwotę

$$1000 \cdot (1 + 0{,}10)^1 = 1100$$

W kolejnym okresie odsetkowym dostaniemy

$$1100 \cdot (1 + 0{,}10)^1 = 1210$$

Druga wpłata pracuje tylko przez jeden okres odsetkowy. Zatem na koniec tego okresu dostaniemy:

$$1500 \cdot (1 + 0{,}10)^1 = 1650$$

co oznacza, że na koniec drugiego roku będziemy dysponować kapitałem w wysokości

$$1000 \cdot (1 + 0{,}10)^2 + 1500 \cdot (1 + 0{,}10)^1 = 1100 = 1210 + 1650 = 2860$$

To jest wartość przyszła naszych wpłat.

Gdybyśmy chcieli stworzyć ogólną formułę na wartość przyszłą strumienia gotówkowego, jeśli wpłaty są dokonywane raz w roku na początku, są regularne o różnych wielkościach CF_i, to mamy:

$$FV = CF_0(1 + r)^T + CF_1(1 + r)^{T-1} + CF_2(1 + r)^{T-2} + \cdots + CF_T \tag{2.7}$$

gdzie CF_i przepływ gotówki na początku i-tego roku, a T czas inwestycji.

Jeśli będziemy mieć płatności na końcu roku, to wartość przyszła tych płatności będzie miała postać:

$$FV = CF_1(1 + r)^{T-1} + CF_2(1 + r)^{T-2} + \cdots + CF_{T-1}(1 + r)^1 \tag{2.8}$$

Załóżmy teraz, że dokonywalibyśmy regularnych, stałych wpłat CF przez T lat. Taki strumień pieniężny nazywamy rentą okresową (*annuity*). Możemy wyróżnić rentę z płatnościami z góry (*annuity due*) i z płatnościami z dołu (*deferred annuity)*. Wtedy nasze zależności (2.7) oraz (2.8) przyjmą postać:

$$FV = CF(1+r)^T + CF(1+r)^{T-1} + CF(1+r)^{T-2} + \cdots + CF = \sum_{i=0}^{T} CF(1+r)^{T-i} \tag{2.9}$$

oraz

$$FV = CF(1+r)^{T-1} + CF(1+r)^{T-2} + CF(1+r)^{T-3} + \cdots + CF = \sum_{i=1}^{T} CF(1+r)^{T-i} \tag{2.10}$$

Jeśli teraz pomnożymy zależność (2.10) przez $(1+r)$ i od wyniku tego mnożenia odejmiemy zależność (2.10), otrzymamy:

$$\begin{aligned} FV(1+r) - FV &= CF\Big(\sum_{i=1}^{T}(1+r)^{T-i+1} - \sum_{i=1}^{T}(1+r)^{T-i}\Big) \\ &= CF((1+r)^T - 1) \end{aligned}$$

wyznaczając stąd wartość przyszła FV renty okresowej płatnej na koniec roku otrzymujemy

$$FV = CF\,\frac{(1+r)^T - 1}{r} \tag{2.11}$$

Czyli mamy zależność na wartość przyszłą renty okresowej, gdzie płatności dokonujemy pod koniec roku.

Przykład 2.7 Policzmy wartość przyszłą 30-letniej renty płatnej na koniec roku w wysokości 1000 zł, jeśli stopa procentowa $r = 12\%$
Korzystamy z wyrażenia (2.11) i otrzymujemy

$$FV = 1000\frac{(1+0{,}12)^{30} - 1}{0{,}12} = 241\,333 \text{ zł}$$

□

Zobaczmy teraz co się stanie gdybyśmy inwestowali w naszą rentę płatna z dołu raz w roku stałą kwotę pieniędzy, ale byłyby one kapitalizowane częściej np. raz w miesiącu. Jak zmieni się wartość przyszła naszego strumienia płatności? Mielibyśmy

$$\begin{aligned} FV &= CF(1+\frac{r}{m})^{m(T-1)} + CF(1+\frac{r}{m})^{m(T-2)} + \cdots + CF(1+\frac{r}{m})^{m(T-T+1)} + CF \\ &= \sum_{i=1}^{T} CF(1+\frac{r}{m})^{m(T-i)} \end{aligned} \tag{2.12}$$

Jeśli pomnożymy teraz obie strony zależności (2.12) przez $(1 + r/m)^m$ i od wyniku tej operacji odejmiemy zależność (2.12) wtedy dostaniemy

$$\begin{aligned} (1+r/m)^m FV - FV &= CF\Big(\sum_{i=1}^{T}(1+r/m)^{m(T-i)+m} - \sum_{i=1}^{T}(1+r/m)^{m(T-i)}\Big) \\ &= CF\Big((1+\frac{r}{m})^{mT} - 1\Big) \end{aligned} \tag{2.13}$$

Wyznaczając z zależności (2.13) wartość przyszłą FV dostaniemy

$$FV = CF\,\frac{1-(1+r/m)^{mT}}{1-(1+r/m)^m} \tag{2.14}$$

Przykład 2.8 Powróćmy do naszego przykładu 2.7 i załóżmy, że odkładamy teraz 1200 zł rocznie na przyszła emeryturę (załóżmy jak poprzednio, że przez 30 lat). Załóżmy dodatkowo, że uda nami się lokować nasze oszczędności na 12% w skali roku. I załóżmy, że teraz kapitalizujmy nasze oszczędności co miesiąc. Wtedy wartość przyszła FV naszej emerytury po 30 latach wyniesie

$$FV = CF\,\frac{1-(1+r/m)^{mT}}{1-(1+r/m)^{m}} = 1200\,\frac{1-(1+0{,}12/12)^{12\cdot 30}}{1-(1+0{,}12/12)^{12}} = 330\,688$$

□

Zobaczmy jak zmieni się nasza przyszła emerytura gdy oszczędności odkładamy częściej niż raz w roku i kapitalizowane są one w takich samych okresach jak odkładamy nasze oszczędności. Zobaczmy co się stanie gdybyśmy częściej inwestowali w naszą rentę, np. raz w miesiącu stałą kwotę pieniędzy. Wtedy wartość przyszła naszej inwestycji będzie wynosiła:

$$\begin{aligned} FV &= \frac{CF}{m}(1+\frac{r}{m})^{mT-1} + \frac{CF}{m}(1+\frac{r}{m})^{mT-2} + \cdots + \frac{CF}{m}(1+\frac{r}{m})^{mT-mT+1} + \frac{CF}{m} \\ &= \frac{CF}{m}\sum_{i=1}^{mT}\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mT-i} \qquad (2.15) \end{aligned}$$

Jeśli teraz pomnożymy wyrażenie (2.15) obustronnie przez $(1+r/m)$ i od wyniku tego mnożenia odejmiemy (2.15) otrzymamy

$$\begin{aligned} (1+r/m)FV - FV &= \frac{CF}{m}\left(\sum_{i=1}^{T}\left(1+r/m\right)^{m(T-i)+m} - \sum_{i=1}^{T}\left(1+r/m\right)^{m(T-i)}\right) \\ &= \frac{CF}{m}\left(1-(1+\frac{r}{m})^{mT}\right) \qquad (2.16) \end{aligned}$$

i dokonując prostych przekształceń mamy zależność na wartość przyszłą takiego ciągu płatności:

$$FV = CF\,\frac{(1+r/m)^{mT}-1}{r} \qquad (2.17)$$

Wróćmy teraz do naszego przykładu i załóżmy, że dokonujemy miesięcznych wpłat w wysokości 100 zł i mamy możliwość kapitalizacji co miesiąc. Wtedy wartość przyszła naszej renty ma wartość:

$$FV = 1200\,\frac{(1+0{,}12/12)^{12\cdot 30}-1}{0{,}12} = 349\,496 \text{ zł}$$

2.3. Wycena ciągu płatności

Własność wartości pieniądza w czasie wykorzystamy teraz przy wycenie obligacji. Przepływy gotówkowe z obligacji są całkowicie zdeterminowane przez wartość nominalną obligacji (*face value* lub *par value*), oprocentowanie (*coupon rate*) oraz czas zapadalności (*maturity date*). Przykładowo, obligacja, o nominale 1000 zł, oprocentowaniu 5% w skali roku, zapadająca 20 września 2019 roku daje posiadaczowi obligacji prawo otrzymywania odsetek w wysokości 5% $\times$ 1000 zł = 50 zł 20 września każdego roku (do 2019 roku), a w roku 2019 dodatkowo jeszcze nominału 1000 zł.

Najprostszą konstrukcję mają zero-kuponowe papiery dłużne, często nazywane papierami dyskontowymi, z racji tej, że cena takiego instrumentu jest niższa niż cena nominalna.

2.4. Wycena obligacji

Obligacja kuponowa stanowi skończony strumień płatności – kuponów (odsetek) oraz wartości nominalnej obligacji – w przyszłości. Aby wycenić wartość takiego ciągu płatności dzisiaj musimy zdyskontować te strumienie płatności w przyszłości na dzień wyceny. Zatem

wartość dzisiejsza strumienia płatności =
wartość dzisiejsza kuponów + wartość dzisiejsza nominału

Oczywiście musimy założyć, że mamy daną stopę procentową dyskontującą te przepływy. Oznaczmy ją przez r. Wtedy wartość obligacji P (wartość dzisiejsza strumienia płatności w przyszłości) wynosi

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i/m}{(1+r/m)^i} + \frac{F}{(1+r/m)^n} \tag{2.18}$$

gdzie:
n - liczba okresów odsetkowych, $n = m \cdot T$
m - liczba płatności odsetkowych w roku,
T - zapadalność obligacji (liczba lat "życia obligacji");
F - wartość nominalna obligacji (*par value*),
C_i/m - wysokość kuponu w i-tym okresie odsetkowym, $1 \leqslant i \leqslant n$,
i - chwile, w których następują płatności, $1 \leqslant i \leqslant n$,
r - stopa procentowa dyskontująca przyszłe przepływy.

W powyższej formule założyliśmy, że każdy z przepływów jest dyskontowany tą samą stopą procentową r. Warto zauważyć, że wysokość kuponu C_i zależy od oprocentowania obligacji c_i następująco

$$C_i = c_i \cdot F$$

gdzie:
c_i - stopa kuponowa (oprocentowanie) obligacji w i-tym okresie odsetkowym, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Założyliśmy również, że jest to obligacja o zmiennym kuponie, czyli wysokość kuponu jest inna w każdym okresie odsetkowym. Jeśli założymy, że mamy obligację o stałym kuponie to wtedy $C_i/m = C/m$ dla każdego i-tego okresu odsetkowego.

Wówczas zależność (2.18) będzie miała postać

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{C/m}{(1+r/m)^i} + \frac{F}{(1+r/m)^n} \tag{2.19}$$

Przykład 2.9 Niech będzie dana 3-letnia obligacja o wartości nominalnej F=100 zł, oprocentowaniu $c = 8\%$ p.a. (*per annum*) (w skali roku), kuponach płatnych raz do roku, $m = 1$. Niech stopa procentowa r dyskontująca przepływy wynosi 6% p.a. Wtedy wartość obligacji wyznaczymy następująco

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=1}^{3} \frac{C/m}{(1+r/m)^i} + \frac{F}{(1+r/m)^3} \\ &= \frac{8}{1+0{,}06} + \frac{8}{(1+0{,}06)^2} + \frac{108}{(1+0{,}06)^3} \\ &= 105{,}35 \end{aligned}$$

Załóżmy teraz, że obligacja wypłaca kupony 2 razy w roku, czyli m=2. Wtedy liczba okresów odsetkowych wzrośnie 2 razy, wysokość kuponu $C/m = c/m \cdot F = 8\%/2 \cdot 100$= 4 zł, a wartość obligacji wyniesie

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=1}^{6} \frac{C/m}{(1+r/m)^i} + \frac{F}{(1+r/m)^6} \\ &= \frac{4}{1+0{,}03} + \frac{4}{(1+0{,}03)^2} + \cdots + \frac{4}{(1+0{,}03)^5} + \frac{104}{(1+0{,}03)^6} \\ &= 105{,}42 \end{aligned}$$

Z racji częstszego wypłacania kuponów wartość obligacji (takiego strumienia zdyskontowanych przepływów pieniężnych) jest wyższa. □

Zastanówmy się teraz co się stanie z wartością obligacji, jeśli zmieni się stopa procentowa dyskontująca przepływy pieniężne.

Przykład 2.10 Załóżmy, że mamy obligację o parametrach jak w przykładzie 2.9, o odsetkach płatnych raz w roku, m=1. Niech teraz stopa procentowa r dyskontująca przepływy wynosi 8% w skali roku. Wtedy wartość naszej obligacji wynosi

$$\begin{aligned}
P &= \frac{8}{1+0{,}08} + \frac{8}{(1+0{,}08)^2} + \frac{108}{(1+0{,}08)^3} \\
&= \frac{8}{1+0{,}08} + \frac{8}{(1+0{,}08)^2} + \frac{108}{(1+0{,}08)(1+0{,}08)^2} \\
&= \frac{8}{1+0{,}08} + \frac{8}{(1+0{,}08)^2} + \frac{100}{(1+0{,}08)^2} \\
&= \frac{8}{1+0{,}08} + \frac{108}{(1+0{,}08)^2} \\
&= \frac{108}{1+0{,}08} \\
&= 100{,}00
\end{aligned}$$

Zatem jeśli stopa procentowa r dyskontująca przepływy kuponowe jest równa oprocentowaniu obligacji c to wartość takiej obligacji jest równa wartości nominalnej.
Załóżmy teraz, że stopa procentowa r dyskontująca przepływy wynosi 10% w skali roku. Wtedy wartość naszej obligacji wynosi

$$\begin{aligned}
P &= \sum_{i=1}^{3} \frac{C/m}{(1+r/m)^i} + \frac{F}{(1+r/m)^3} \\
&= \frac{8}{1+0{,}1} + \frac{8}{(1+0{,}1)^2} + \frac{108}{(1+0{,}1)^3} \\
&= 95{,}62
\end{aligned}$$

□

Zatem możemy zanotować następującą obserwację:

$$\begin{aligned}
&(\text{oprocentowanie obligacji } c < r) \iff (\text{wartość obligacji } P < \text{wartość nominalna } F) \\
&(\text{oprocentowanie obligacji } c = r) \iff (\text{wartość obligacji } P = \text{wartość nominalna } F) \\
&(\text{oprocentowanie obligacji } c > r) \iff (\text{wartość obligacji } P > \text{wartość nominalna } F)
\end{aligned}$$

W analizowanych przykładach wycenialiśmy obligację na początku okresu odsetkowego, a dokładniej 'w dniu jej wodowania' (w dniu jej emisji). Chcemy teraz wycenić obligację w dowolnej chwili okresu odsetkowego.

Przykład 2.11 Załóżmy, że mamy obligację o parametrach jak w przykładzie 2.9, o odsetkach płatnych raz w roku, m=1. Ale przyjmijmy teraz, że wyceniamy ją na 2 lata i 3 miesiące przed terminem wykupu, czyli na 3 miesiące przed końcem pierwszego okresu odsetkowego. Pierwszy kupon w naszej sumie (2.18) będzie zatem dyskontowany czynnikiem $\frac{1}{(1+0{,}06)^{0{,}25}}$, bo cały okres odsetkowy to 12 miesięcy, a mamy 3 miesiące do wypłaty pierwszego kuponu.

Zatem czas do wypłaty pierwszego kuponu wynosi $3/12 = 0{,}25$. Wtedy wartość obligacji wyniesie

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=0,25}^{2,25} \frac{C/m}{(1+r/m)^i} + \frac{F}{(1+r/m)^{2,25}} \\ &= \frac{8}{(1+0{,}06)^{0,25}} + \frac{8}{(1+0{,}06)^{1,25}} + \frac{108}{(1+0{,}06)^{2,25}} \\ &= 110{,}05 \end{aligned}$$

Niech teraz odsetki będą wypłacane co pół roku, czyli m=2. Mamy zatem 6 okresów odsetkowych, jednak pierwszy kupon już został wypłacony, bo obligacja zapada za 2 lata i 3 miesiące. Zatem jesteśmy w połowie drugiego okresu odsetkowego i drugi kupon będzie dyskontowany czynnikiem $\frac{1}{(1+0{,}06/2)^{0,5}}$. Stąd wartość obligacji

$$\begin{aligned} P &= \sum_{i=0,5}^{4,5} \frac{C/m}{(1+r/m)^i} + \frac{F}{(1+r/m)^{4,5}} \\ &= \frac{4}{(1+0{,}03)^{0,5}} + \frac{4}{(1+0{,}03)^{1,5}} + \cdots + \frac{4}{(1+0{,}03)^{3,5}} + \frac{104}{(1+0{,}03)^{4,5}} \\ &= 106{,}14 \end{aligned}$$

□

Czyli ogólnie możemy zapisać:
jeśli długość odcinka czasowego do najbliższej płatności jest mniejsza niż długość okresu odsetkowego to wartość obligacji wyrazimy następująco

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i/m}{(1+\frac{r}{m})^{\nu}(1+\frac{r}{m})^{i-1}} + \frac{F}{(1+\frac{r}{m})^{\nu}(1+\frac{r}{m})^{n-1}} \tag{2.20}$$

gdzie

$$\nu = \frac{\text{liczba dni do najbliższego kuponu}}{\text{liczba dni w okresie odsetkowym}} \tag{2.21}$$

Na taki ciąg płatności odsetek w obligacji o stałych kuponach możemy patrzeć jak na rentę okresową o płatnościach C/m. Zatem możemy napisać

wartość dzisiejsza strumienia płatności
=
wartość dzisiejsza renty okresowej
+
wartość dzisiejsza nominału

Wiemy, że wartość dzisiejszą renty okresowej PVA o płatnościach C/m i stopie procentowej r, można wyrazić następująco

$$PVA(r,n) = \frac{C}{r}\left\{1 - \frac{1}{(1+r/m)^n}\right\} \tag{2.22}$$

Zatem wartość obligacji wynosi

$$P = PA(r, n) + \frac{F}{(1 + r/m)^n} \tag{2.23}$$

czyli mamy zależność

$$P = \frac{C}{r}\left\{1 - \frac{1}{(1 + r/m)^n}\right\} + \frac{F}{(1 + r/m)^n} \tag{2.24}$$

Ta postać jest szczególnie przydatna gdy obliczamy wartość obligacji o długim okresie zapadalności.

Przykład 2.12 Niech będzie dana 30-letnia obligacja o wartości nominalnej F=100 zł, oprocentowaniu $c = 8\%$ p.a., kuponach płatnych 2 razy do roku, $m = 2$. Niech stopa procentowa r dyskontująca przepływy wynosi 6% p.a. Wtedy wartość obligacji wynosi

$$P = \frac{8}{0{,}06}\left\{1 - \frac{1}{(1 + 0{,}06/2)^{60}}\right\} + \frac{100}{(1 + 0{,}06/2)^{60}} = 110{,}70 + 16{,}97 = 127{,}68$$

□

W szczególności obligacja 0-kuponowa (możemy też spotkać pisownię: zerokuponowa) wyraża się prostą zależnością

$$P = \frac{F}{(1 + r/m)^n} \tag{2.25}$$

Warto zastanowić się dlaczego w zależności (2.25) występuje liczba płatności kuponów w ciągu roku m, jeśli mamy obligację 0-kuponową, czyli nie płacącą kuponów. Otóż, aby móc porównać wartość obligacji 0-kuponowej z obligacjami kuponowymi dostępnymi na rynku, które wypłacają kupony co pół roku, musimy również dyskontować nominał obligacji 0-kuponowej odpowiednim czynnikiem dyskontującym uwzględniającym fakt wypłacania kuponów co pół roku.

Powyższe rozważania były prowadzone dla modelu kapitalizacji dyskretnej. Dla modelu kapitalizacji ciągłej, wartość obligacji będzie dana zależnością

$$P = \sum_{i=1}^{n} C_i/m \cdot \exp(-r \cdot t_i) + F \cdot \exp(-r \cdot t_n) \tag{2.26}$$

gdzie:
exp - podstawa logarytmu naturalnego,
t_i - chwila w której wypłacany jest i-ty kupon, $1 \leqslant i \leqslant n$.
W szczególności, dla obligacji o stałym kuponie, gdy $C_i/m = C/m$, mamy

$$P = \sum_{i=1}^{n} C/m \cdot \exp(-r \cdot t_i) + F \cdot \exp(-r \cdot t_n) \tag{2.27}$$

2.5. Stopa par

Będziemy chcieli wprowadzić jeszcze jedną stopę, mianowicie stopę *par* (*par yield*). Wyobraźmy sobie, że mamy T-letnią obligację o stałych rocznych kuponach C wypłacanych m razy w roku. Załóżmy, że mamy odpowiednie stopy spot $r(i/m)$, $1 \leqslant i \leqslant m \cdot T$. Poszukujemy oprocentowania obligacji $c(T)$ tak, aby cena obligacji P była równa jej cenie nominalnej F. Cenę obligacji możemy zapisać następująco:

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{C/m}{(1 + r(t_i)/m)^i} + \frac{F}{(1 + r(t_n)/m)^{m \cdot T}} \tag{2.28}$$

Ponieważ mamy stopę spot $r(t_i)$ to możemy wyznaczyć odpowiadający czynnik dyskontowy

$$DF(t_i) = \frac{1}{(1 + r(t_i)/m)^i}, \qquad i = 1, \ldots, mT \tag{2.29}$$

Wtedy cena obligacji

$$P = \frac{C}{m} \sum_{i=1}^{n} DF(t_i) + FDF(t_n) \tag{2.30}$$

Jeśli teraz przez C podstawimy cF i uwzględnimy fakt, że szukamy takiego c aby cena obligacji P była równa cenie nominalnej F wtedy dostaniemy zależność

$$F = \frac{cF}{m} \sum_{i=1}^{n} DF(t_i) + FDF(t_n) \tag{2.31}$$

co oznacza, że

$$1 = \frac{c}{m} \sum_{i=1}^{n} DF(t_i) + DF(t_n) \tag{2.32}$$

co w konsekwencji prowadzi do wyznaczenia oprocentowania obligacji $c = c(t_n)$

$$c = c(t_n) = m \frac{1 - DF(t_n)}{\sum_{i=1}^{n} DF(t_i)} \tag{2.33}$$

Przykład 2.13 Załóżmy, że mamy dane stopy spot: roczną $r(1)$= 5% i 2-letnią $r(2)$=5,3%. Będziemy chcieli wyznaczyć stopy par: roczną $c(1)$ oraz 2-letnią $c(2)$.

Roczna stopa par $c(1)$ musi spełniać równanie:

$$F = \frac{c(1) \cdot F + F}{(1 + r(1))} \tag{2.34}$$

a stąd wynika, że

$$1 = \frac{c(1) + 1}{(1 + r(1))} \tag{2.35}$$

co oznacza, że $c(1)$=$r(1)$ = 5%.

Dwuletnia stopa par $c(2)$ spełnia zależność

$$F = \frac{c(2) \cdot F}{(1 + r(1))} + \frac{c(2) \cdot F + F}{(1 + r(2))^2} \tag{2.36}$$

czyli

$$1 = \frac{c(2)}{(1 + r(1))} + \frac{c(2) + 1}{(1 + r(2))^2} \tag{2.37}$$

w języku czynników dyskontowych mamy

$$1 = c(2)DF(1) + (c(2) + 1)DF(2) \tag{2.38}$$

stąd

$$c(2) = \frac{1 - DF(2)}{DF(1) + DF(2)} \tag{2.39}$$

Czynniki dyskontowe wynoszą odpowiednio:$DF(1)$= 0,95238 oraz $DF(2)$=0,90187. Zatem 2-letnia stopa par $c(2)$ = 5,29% □

2.6. Wybrana bibliografia

2.7. Strony internetowe

www.bis.org
www.mf.gov.pl

2.8. Rynki obligacji

Poprzednio pokazaliśmy jak wyceniać strumień płatności. Mieliśmy podane parametry obligacji, zakładaliśmy stopę procentową (wymaganą stopę dla inwestora) dyskontującą kupony oraz nominał obligacji i obliczaliśmy ile jest wart dzisiaj taki przyszły ciąg strumienia płatności, czyli jaka jest wartość obligacji.

W rzeczywistości rynek obligacji działa inaczej. Mając dane parametry obligacji, rynek kapitałowy kwotuje (wycenia) tę obligację. Czyli ceny obligacji podaje nam rynek, natomiast to co musimy wyznaczyć to wysokość stopy procentowej dyskontującej przepływy pieniężne. Czyli jeśli z jednej strony mamy kwotowania rynkowe cen obligacji (lewa strona zależności (2.18)), a z drugiej znamy parametry obligacji (prawa strona zależności (2.18), z wyjątkiem wysokości stopy procentowej r dyskontującej przepływy) to problem wyceny obligacji sprowadza się do znalezienia wewnętrznej stopy zwrotu (*internal rate of return IRR*) sumy takich przepływów gotówkowych. W przypadku papierów dłużnych, wewnętrzna stopa zwrotu nazywana jest **stopą zwrotu w terminie do wykupu** (stopą zwrotu w okresie do wykupu) (*yield to maturity YTM*).

Definicja 2.1 *Stopa zwrotu w terminie do wykupu YTM to średnia stopa zwrotu uzyskana z inwestycji w obligację kupioną dziś i trzymaną do wykupu przy reinwestowaniu kuponów po stopie YTM.*

Zobaczmy, że w istocie zachodzi taka zależność.

Przykład 2.14 Inwestujemy dzisiaj w 3-letnią obligację, która wypłaca kupony C raz do roku, m=1, w wysokości 5 zł. Nominał obligacji F=100 zł, a cena P=87,57 zł.
Stąd wynika, że YTM tej obligacji wynosi 10%. Załóżmy, że reinwestujemy kupony po pierwszym i po drugim roku po stopie YTM=10%, bo

$$87{,}57 = \frac{5}{(1+0{,}1)^1} + \frac{5}{(1+0{,}1)^2} + \frac{105}{(1+0{,}1)^3}$$

Całkowita wartość inwestycji po 3 latach wyniesie

$$5 \cdot (1{,}1)^2 + 5 \cdot 1{,}1 + 105 = 116{,}55$$

Zatem nasza inwestycja generuje roczną stopę zwrotu YTM w ciągu tego okresu taką, że

$$(1 + YTM)^3 = \frac{116{,}55}{87{,}57}$$

czyli

$$YTM = 10\%$$

co chcieliśmy pokazać. □

W dalszych rozważaniach będziemy stosować oznaczenie $y = YTM$.
Zatem nasza zależność (2.18) przyjmie teraz postać dla modelu dyskretnego

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{C_i/m}{(1+y/m)^i} + \frac{F}{(1+y/m)^n} \tag{2.40}$$

a dla modelu ciągłego

$$P = \sum_{i=1}^{n} C_i/m \cdot \exp(-y \cdot t_i) + F \cdot \exp(-y \cdot t_n) \tag{2.41}$$

Stopa zwrotu w terminie YTM do wykupu nie determinuje (w sensie ekonomicznym) ceny obligacji. To jest raczej wygodny sposób określania jedną liczbą 'średniej rocznej stopy zwrotu' z inwestycji w obligację, jeśli mamy daną cenę obligacji. Stopa YTM mierzy stopę zwrotu z obligacji, jeśli:
i) obligacja jest trzymana do wykupu
ii) kupony obligacji są inwestowane po stopie równej YTM

Jednak stopy YTM nie są stopami zwrotu z inwestycji w obligację. Zacznijmy od obligacji 0-kuponowej. Przypuśćmy, że obligacja została kupiona po cenie P. Zatem stopa zwrotu w terminie do wykupu takiej obligacji wynosi

$$(1 + \frac{y}{m})^{mT} = \frac{100}{P} \tag{2.42}$$

czyli

$$y = m\Big(\Big(\frac{100}{P}\Big)^{\frac{1}{mT}} - 1\Big) \tag{2.43}$$

W tym przypadku stopa zwrotu z inwestycji i stopa zwrotu w terminie do wykupu YTM są równe.

Natomiast mamy problem jeśli musimy określić stopy zwrotu 2 obligacji 0-kuponowych o różnych okresach zapadalności.

Przypuśćmy, że mamy 2 obligacje: 3-letnią o YTM = 6% oraz obligację 4-letnią o YTM = 7%. Odpowiedź na pytanie, która obligacja daje wyższą stopę zwrotu jest niejednoznaczna i zależy od horyzontu inwestycyjnego. W szczególności, zobaczmy jaka jest stopa zwrotu z takich alternatywnych inwestycji po 3 latach. Weźmy też dla ustalenia uwagi, że m=1. Obligacja 3-letnia daje stopę zwrotu równą 6%. Dla obligacji 4-letniej stopa zwrotu k znajdujemy rozwiązując równanie

$$\Big(1 + \frac{k}{m}\Big)^{mT} = \frac{P_1}{P} \tag{2.44}$$

gdzie P_1 to cena sprzedaży obligacji 4-letniej na rok przed zapadalnością . Załóżmy, że za 3 lata roczna stopa spot wynosi 8%. Wtedy cena P_1 = 92,5926 a stopa zwrotu z inwestycji k wynosi 6,669%. Zatem stopa zwrotu z obligacji 3-letniej jest wyższa. Jeśli teraz założymy, że za 3 lata roczna stopa spot wynosi 6,5%, to wtedy stopa zwrotu z inwestycji w obligację 4-letnią wyniesie k = 7,167%

2.9. Kwotowania obligacji na rynku

Warto zwrócić uwagę na fakt, że rynek kwotuje ceny obligacji w specyficzny sposób, podając cenę obligacji bez narosłych odsetek najbliższego kuponu. Czyli kwotowana jest **cena czysta** (*clean price*). Zatem jeśli nabywamy obligację będącą na rynku to, aby policzyć wielkość środków potrzebnych do otwarcia pozycji musimy wziąć pod uwagę **narosłe odsetki** (*accrued interest*). Sumę tych dwóch wielkości nazywamy **ceną brudną** (*dirty price*)

$$\text{cena brudna} = \text{cena czysta} + \text{narosłe odsetki}$$

gdzie:
cena czysta to cena kwotowana (cena podawana w gazecie),

$$\text{narosłe odsetki} = \frac{\text{liczba dni od ostatniego kuponu}}{\text{liczba dni w okresie odsetkowym}} \times \text{wielkość kuponu}$$

czyli

$$\text{narosłe odsetki} = (1-\nu)\frac{c}{m}F$$

W takiej sytuacji YTM, zawsze określa stopę zwrotu w terminie do wykupu dla ceny brudnej obligacji.

Uwaga (dotyczy **podstawy naliczania odsetek** (*day account* lub *day basis*))

Zwykle wycena obligacji nie jest dokonywana w terminach płatności kuponowych obligacji, lecz na ustalony termin wyceny. Przykładowo, fundusze inwestycyjne muszą podawać skład portfela obligacji 2 razy do roku - na koniec czerwca i koniec grudnia, oraz muszą dokonać wyceny tego portfela. Gdy znane są termin wykupu obligacji i termin wyceny, to różnica między nimi określa dokładny horyzont czasowy inwestycji. Metoda określania długości czasu między tymi terminami znana jest jako podstawa naliczania odsetek. Istnieje wiele metod, według których liczone są te okresy na poszczególnych rynkach obligacji i dla różnych rodzajów instrumentów. Najczęściej stosowane konwencje to:

Actual/actual – rzeczywista liczba dni w okresie inwestycji w stosunku do rzeczywistej liczby dni w roku (365 dni lub 366 dni dla roku przestępnego),

Actual/365 – rzeczywista liczba dni w okresie inwestycji w stosunku do 365 dni w roku bez względu na to, czy rok jest przestępny,

30/360 – zakłada się, że każdy miesiąc kalendarzowy ma 30, a rok 360 dni bez względu na rzeczywistą ich liczbę.

Przykład 2.15 Obligacja wypłaca kupony co pół roku (m=2) w dniach:
7 kwietnia i 7 października.
Mamy dokonać wyceny obligacji na dzień 15 października zakładając, że następny rok nie jest rokiem przestępnym. Aby wycenić obligację, musimy określić jaka część okresu odsetkowego pozostała do najbliższej płatności kuponowej, jeśli przyjmiemy następujące metody liczenia dni:
a) Actual/actual
b) 30/360.

□

Stopę zwrotu w terminie do wykupu YTM nie można wyznaczyć w sposób analityczny w modelu dyskretnym (czyli z zależności (2.40)) czy też w modelu ciągłym (zależność (2.41)). Można to zrobić tylko metodą prób i błędów lub w sposób numeryczny.

Stopę zwrotu w terminie do wykupu YTM można analitycznie wyznaczyć tylko i wyłącznie dla obligacji kuponowej z jednym kuponem oraz dla obligacji 0-kuponowej, z racji tylko jednego przepływu. W przypadku obligacji 0-kuponowej, dla modelu dyskretnego mamy

$$y = \left(\frac{F}{P}\right)^{1/n} - 1 \tag{2.45}$$

a dla modelu ciągłego

$$y = \frac{1}{t_n} \ln\left(\frac{F}{P}\right) \tag{2.46}$$

2.10. Inne miary stopy zwrotu

Obok stopy zwrotu w terminie do wykupu YTM istnieją inne miary stopy zwrotu. Drugą miarą stopy zwrotu z obligacji jest **bieżąca stopa zwrotu** (*current yield* CY), którą możemy zdefiniować następująco

$$\text{bieżąca stopa zwrotu} = \frac{\text{oprocentowanie obligacji w skali roku}}{\text{cena czysta obligacji}} \tag{2.47}$$

Kolejna miarą stopy zwrotu z obligacji jest **stopa kuponowa** (*coupon rate* CR), którą definiujemy następująco

$$\text{stopa kuponowa} = \frac{\text{oprocentowanie obligacji w skali roku}}{\text{cena nominalna obligacji}} \tag{2.48}$$

Stopa kuponowa to inaczej oprocentowanie obligacji. Czyli

$$CR = c$$

Powstaje naturalne pytanie jakie są zależności pomiędzy miarami stóp zwrotu z obligacji. Zobaczmy te zależności na przykładzie.

Przykład 2.16 Załóżmy, że mamy 5-letnią obligację o wartości nominalnej F=1000 zł, oprocentowaniu $c = 8\%$ p.a., kuponach płatnych dwa razy do roku, $m = 2$. Niech cena tej obligacji wynosi P=108,53% wartości nominalnej.
Zatem

$$\begin{aligned} CR &= \frac{80}{1000} = 8{,}00\% \\ CY &= \frac{80}{1085{,}30} = 7{,}37\% \\ YTM &= 6\% \end{aligned}$$

Czyli mamy $YTM < CY < CR$.

Weźmy teraz sytuację, gdy obligacja jest wyceniona przez rynek na poziomie P= 92,28% wartości nominalnej. Wtedy

$$\begin{aligned} CR &= \frac{80}{1000} = 8{,}00\% \\ CY &= \frac{80}{922{,}78} = 8{,}67\% \\ YTM &= 10\% \end{aligned}$$

Czyli mamy $YTM > CY > CR$.

Oczywiście, gdy obligacja jest wyceniana przez rynek na poziomie ceny nominalnej to wtedy $YTM = CY = CR$. □

2.11. YTM portfela obligacji

Stopy zwrotu w terminie do wykupu nie są addytywne, tzn. TYM portfela obligacji nie jest sumą ważoną YTM obligacji w portfelu

Stopę zwrotu w terminie do wykupu obliczamy dla portfela obligacji w specyficzny sposób. Należy określić wszystkie przepływy gotówkowe generowane przez każdą z obligacji będącą w portfelu. Taki portfel ma określoną wartość (czyli cenę). YTM portfela to stopa dyskontująca wszystkie te przepływy portfela tak, aby wartość dzisiejsza tych przepływów była równa wartości rynkowej portfela.

Zobaczmy to na przykładzie.

Przykład 2.17 Rozważmy portfel 3 obligacji o nominale 100 zł każda. Załóżmy, że wszystkie 3 obligacje wypłacają kupon raz do roku (m=1). Załóżmy także, że mamy w portfelu po jednej obligacji A, B oraz C.

obligacje	zapadalność	oprocentowanie	cena	YTM
A	2	5%	100,00	5,00%
B	3	7%	100,00	7,00%
C	3	0%	80,50	7,50%

Jeśli policzymy stopę zwrotu w terminie do wykupu YTM$_p$ portfela obligacji rozwiązując równanie

$$P_A+P_B+P_C = 100+100+80{,}50 = 208{,}50 = \frac{12}{(1+YTM_p)}+\frac{112}{(1+YTM_p)^2}+\frac{207}{(1+YTM_p)^3} \tag{2.49}$$

uzyskamy YTM$_p$= 6,39%.

Jeśli natomiast policzylibyśmy YTM$_p$ jako średnią ważoną stopę zwrotu obligacji w portfelu

$$YTM_p = w_A YTM_A + w_B YTM_B + w_C YTM_C \tag{2.50}$$

gdzie wagi

$$\begin{aligned} w_A &= \frac{P_A}{P_A+P_B+P_C} = \frac{100}{100+100+80,50} = 0,357 \\ w_B &= \frac{P_B}{P_A+P_B+P_C} = \frac{100}{100+100+80,50} = 0,357 \\ w_C &= \frac{P_C}{P_A+P_B+P_C} = \frac{80,50}{100+100+80,50} = 0,287 \end{aligned}$$

wtedy $YTM_p = 6,43\%$. Widać, że tak policzona stopa zwrotu w terminie do wykupu różni się od wartości policzonej wcześniej. □

Widzimy, że stopa zwrotu w terminie do wykupu nie ma własności addytywności.

2.12. Zależność cena–stopa zwrotu w terminie do wykupu obligacji

Pomimo tego, że zależnosc opisująca cenę papieru dłużnego jest skomplikowana, jednak można stosunkowo łatwo określić jakościowe zależności pomiędzy ceną obligacji P, stopą zwrotu w terminie do wykupu YTM, oprocentowaniem obligacji C i czasem do wykupu T. Określenie tych relacji pozwoli lepiej zrozumieć problemy ryzyka stopy procentowej oraz zarządzania portfelem papierów dłużnych.

Możemy ogólnie napisać, że cena papieru dłużnego P jest funkcją trzech zmiennych:
- stopy zwrotu w terminie do wykupu YTM,
- czasu do wykupu (zapadalności) obligacji T,
- oprocentowania obligacji c.

Zatem mamy zależność

$$P = \text{funkcja}(YTM, \text{czasu do wykupu}, \text{oprocentowania obligacji})$$

Relacje pomiędzy tymi wielkościami zestawmy w punktach. Część z nich była już omówiona, a część zostanie dopiero teraz podana.

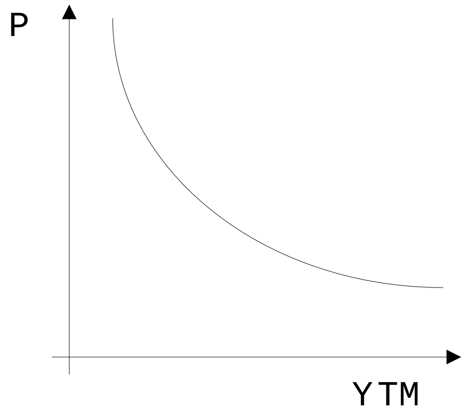
1. Cena obligacji a YTM (dla ustalonego czasu do wykupu i oprocentowania obligacji)

$$\text{cena } P \nearrow \iff YTM \searrow$$

$$\text{cena } P \searrow \iff YTM \nearrow$$

Przy ustalonym czasie do wykupu T oraz ustalonym oprocentowaniu obligacji c, wzrost ceny obligacji P implikuje spadek rentowności obligacji, czyli stopy zwrotu w terminie do wykupu YTM. I odwrotnie, spadek rentowności obligacji wymusza wzrost ich ceny. Dokładnie odwrotną relację mamy przy spdadku cen obligacji. Zatem cena obligacji i rentowność tej obligacji, mierzona stopą zwrotu w terminie do wykupu YTM zawsze podążają w przeciwnych kierunkach.

Co więcej, krzywa YTM-P jest wypukła.



Rysunek 2.5. Zależność ceny obligacji od stopy zwrotu w terminie do wykupu.

2. Cena obligacji P a YTM i oprocentowanie obligacji c

obligacja z dyskontem

$$(c < YTM) \iff (\text{cena}P < \text{wartość nominalna}F)$$

obligacja po cenie *par*

$$(c = YTM) \iff (\text{cena}P = \text{wartość nominalna}F)$$

obligacja z premią

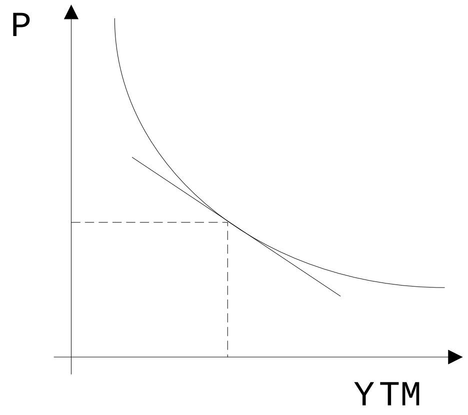
$$(c > YTM) \iff (\text{cena}P > \text{wartość nominalna}F)$$

Ta obserwacja była już zrobiona przy definiowaniu stopy kuponowej i porówaniu jej z innymi miarami zwrotu obligacji, przy czym $c = CR$.

3. Cena obligacji P a czas do wykupu T (przy ustalonym YTM)
Zmniejszanie się premii i dyskonta w miarę zbliżania się terminu wykupu obligacji. Jeśli dane są dwie obligacje o tym samym oprocentowaniu c, tej samej wartości nominalnej F i tej samej stopie stopie zwrotu w terminie do wykupu YTM, to obligacja z krótszym terminem wykupu charakteryzyje się mniejszym dyskontem (mniejszą premią odpowiednio). Tą własność obligacji pokazujemy w run:plik5.xlsarkuszu.

4. Własności krzywej YTM-P dla małych zmian YTM
Niewielkie procentowe zmiany YTM implikują niewielkie (w przybliżeniu równe) procentowe zmiany ceny obligacji (bez względu na spadek czy na wzrost YTM).

5. Własności krzywej YTM-P dla dużych zmian YTM
Duże procentowe zmiany YTM implikują duże (nierówne co do kierunku) procento-



Rysunek 2.6. Lokalna aproksymacja zależności ceny obligacji od stopy zwrotu w terminie do wykupu.

we zmiany ceny obligacji (przy spadku YTM procentowy wzrost ceny obligacji jest większy, niż przy wzroście YTM procentowy spadek ceny obligacji).

6. Własności krzywej YTM-P (dla ustalonego okresu do wykupu T i YTM)
Przy danym okresie do wykupu i danym YTM, im niższe oprocentowanie obligacji tym większa zmienność cen.

7. Własności krzywej YTM-P (dla ustalonego oprocentowania obligacji c i YTM)
Przy danym oprocentowaniu obligacji i danym YTM, im dłuższy okres do wykupu tym większa zmienność cen obligacji.

8. Własności krzywej YTM-P (dla ustalonego oprocentowania c i czasu do wykupu obligacji T)
Przy danym oprocentowaniu i danym czasie do wykupu obligacji, im niższa YTM tym większa zmienność cen obligacji.

Rozdział 3

Struktura terminowa stóp procentowych

Do tej pory zajmowaliśmy się w zasadzie jedną stopą procentową – stopę zwrotu w terminie do wykupu, która dyskontowała wszystkie płatności kuponowe obligacji. Jednak jak wiemy z obserwacji rynku pożyczek międzybankowych, stopa pożyczki czy depozytu zależy od czasu jej trwania. Zatem zamiast dyskontować każdy przepływ stopą zwrotu w terminie do wykupu, będziemy teraz dyskontować każdy kupon inną stopą. Taką analizę nazywamy **strukturą terminową stóp procentowych** lub inaczej **strukturą czasową stóp procentowych** (*term structure of interest rates*).

Struktura terminowa opisuje zależność pomiędzy dochodowością (rentownością) a zapadalnością danego papieru dłużnego. Mamy zatem pewną funkcję

$$T \mapsto r(T) \tag{3.1}$$

zwaną **krzywą dochodowości** (**rentowności**) (*yield curve*),
gdzie:
T - okres zapadalności papieru dłużnego,
$r(T)$ - jest pewną stopą procentową odpowiadająca danemu okresowi zapadalności.

Rynek finansowy wyróżnia kilka krzywych procentowych:
⇒ **krzywą rentowności instrumentów referencyjnych** (*benchmark yield curve*),
⇒ **krzywą spot** (*spot yield curve*) lub inaczej **krzywą 0-kuponową** (*zero coupon yield curve*)
⇒ **krzywą forward**
⇒ **krzywą par**
⇒ **krzywą swapową**.

3.1. Wyznaczanie krzywej 0-kuponowej

Wcześniej zdefiniowaliśmy stopę spot. Stopy spot są podstawowymi stopami procentowymi określającymi strukturę terminową. n-letnia **stopa spot** $r(n)$ jest stopą procentową, określającą stopę zwrotu z inwestycji rozpoczętej dzisiaj a zakończonej w roku n. Przy czym nie ma pośrednich płatności w ciągu trwania inwestycji, a zysk i nominał są wypłacane na końcu okresu. Zatem 3-letnia stopa spot jest stopą zwrotu z inwestycji rozpoczętej dzisiaj i trwającej 3 lata.

Stopa spot to też stopa zwrotu w terminie do wykupu YTM obligacji 0-kuponowej (ogólniej: dowolnego papieru dyskontowego). Czyli jeśli obligacja ma czas życia n lat to mamy n-letnią stopę *spot*. W tym przypadku, mamy tylko jeden przepływ gotówkowy – wypłatę przy zapadalności obligacji.

Zwykle na rynku nie ma 0-kuponowych papierów dłużnych o zapadalności dłuższej niż 1 rok. Dlatego aby wyznaczyć krzywą spot (krzywą 0-kuponową) stosuje się metodę bezpośrednią lub metodę samouzgodnienia (*bootstrap*).

Ciekawa obligacja
Europejski Bank Inwestycyjny (EIB) jako pierwszy bank zagraniczny wyemitował 23 listopada 2001 roku, obligację 10-letnią notowaną na GPW SA w Warszawie. Co najważniejsze, jest to obligacja 0-kuponową, z tak długim czasem zapadalności. Nominał obligacji wynosi 10 tys. zł, natomiast zapadalność nastąpi 15 grudnia 2011 roku. Cena emisyjna została ustalona na poziomie 45,87%, co oznacza, że stopa zwrotu w terminie do wykupu YTM wynosi 8,1%. W tym czasie kuponowe obligacje skarbowe o zapadalności 10 lat miały YTM na poziomie 11%. Można się zastanawiać skąd tak duża różnica w dochodowości. Otóż wynika to z ryzyka kredytowego obu emitentów. Rating EIB był na poziomie AAA, natomiast Polski na poziomie BBB[a].

[a] Zgodnie z konwencją agencji Standard&Poor's.

3.1.1. Metoda bezpośrednia

W przypadku metody bezpośredniej mając na rynku kwotowane obligacje z kuponami wybieramy te obligacje, które zapadają w tej samej chwili. Z tych obligacji konstruujemy portfel tak, aby wyeliminować płatności kuponowe portfela a mieć tylko płatność końcową.

Prześledźmy na przykładzie to rozumowanie.

Przykład 3.1 Załóżmy, że mamy obligacje A oraz B o następujących parametrach:
P_A = 94,58%; F_A= 100 zł; c_A= 7%; T_A= 10;
P_B = 79,87%; F_B= 100 zł; c_B= 5%; T_B= 10.
Załóżmy, że obie obligacje wypłacają kupony raz w roku m=1 dokładnie w tym samym dniu.

Naszym celem jest stworzenie portfela obligacji tak, aby replikował obligację 0-kuponową. Konstruujemy portfel składający się z obligacji A oraz B, gdzie liczba obligacji A w portfelu x_A=-5 a liczba obligacji B x_B=7. Tak skonstruowany portfel replikuje 10-letnią 0-kuponową obligację. Cena portfela P_P wynosi

$$P_p = x_A P_A + x_B P_B = -5 \cdot 94{,}58 + 7 \cdot 79{,}87 = 86{,}1724$$

Wartość nominalna portfela wynosi

$$F_p = x_A F_A + x_B F_B = -5 \cdot 100{,}00 + 7 \cdot 100{,}00 = 200{,}00$$

Cena tego portfela implikuje 10-letnią stopę spot

$$r(10) = \sqrt[10]{\frac{F_P}{P_P}} - 1 = \sqrt[10]{\frac{200{,}00}{86{,}1724}} - 1 = 8{,}78\%$$

Warto zwrócić uwagę że 10-letnia stopa spot nie jest średnią arytmetyczną stóp zwrotu w terminie do wykupu obligacji z portfela. □

3.1.2. Metoda bootstrapu

Metodę *bootstrapu* prześledzimy na przykładzie. Załóżmy, że na rynku mamy dostępne bony i obligacje podane w tabeli 3.1.

Tabela 3.1. Bony i obligacje dostępne na rynku.

Lp.	Nominał obligacji [zł]	Data zapadalności [lata]	Kupon roczny [zł]	cena brudna obligacji [zł]
1.	100	0,25	0	97,5
2.	100	0,50	0	94,9
3.	100	1,00	0	90,0
4.	100	1,50	8	96,0
5.	100	2,00	12	101,6
6.	100	2,75	10	99,8

Załóżmy dodatkowo, że kupony wypłacane są co pół roku, $m = 2$. Bedziemy stosować kapitalizację ciągłą. Pomocnicze obliczenia można znaleźć w run: plik42.xlsarkuszu.
Algorytm wyznaczania krzywej spot:
1. wyznaczamy stopę kwartalną $r(0.25)$ z pierwszego bonu

$$r(0{,}25) = \frac{1}{T} \ln \frac{FV}{PV} = \frac{1}{0{,}25} \ln \frac{100}{97{,}50} = 0{,}1013 = 10{,}13\%$$

2. wyznaczamy stopę półroczną $r(0{,}5)$ z drugiego bonu

$$r(0{,}5) = \frac{1}{T} \ln \frac{FV}{PV} = \frac{1}{0{,}5} \ln \frac{100}{94{,}90} = 0{,}1047 = 10{,}47\%$$

3. wyznaczamy stopę roczną $r(1)$ z trzeciego bonu

$$r(1) = \frac{1}{T} \ln \frac{FV}{PV} = \frac{1}{1} \ln \frac{100}{90} = 0{,}1054 = 10{,}54\%$$

policzyliśmy stopy spot dla 3 miesięcy, 6 miesięcy, 1 roku. Ale na rynku nie ma już więcej papierów 0-kuponowych, są tylko obligacje kuponowe.

4. obliczamy stopę półtoraroczną $r(1{,}5)$ analizując 4-tą obligację i dyskontując kupony stopami spot: $r(0{,}5)$, $r(1)$ oraz nieznaną jeszcze w tym momencie $r(1{,}5)$

$$96 = 4e^{-0{,}1047\cdot 0{,}5} + 4e^{-0{,}1054\cdot 1{,}0} + 104e^{-r(1{,}5)\cdot 1{,}5}$$

co oznacza, że

$$e^{-r(1{,}5)\cdot 1{,}5} = 0{,}852 \Longrightarrow r(1{,}5) = -\frac{1}{1{,}5}\ln(0{,}852) = 0{,}1068$$

zatem mamy stopę półtoraroczną $r(1{,}5)$=10,68%
5. obliczamy teraz stopę dwuletnią $r(2)$, analizując piątą obligację i dyskontując kupony wcześniej wyznaczonymi stopami spot otrzymujemy

$$101{,}6 = 6e^{-0{,}1047\cdot 0{,}5} + 6e^{-0{,}1054\cdot 1{,}0} + 6e^{-0{,}1068\cdot 1{,}5} + 106e^{-r(2)\cdot 2}$$

czyli

$$e^{-r(2)\cdot 2} = 0{,}806 \Longrightarrow r(2) = -\frac{1}{2}\ln(0{,}806) = 0{,}1081$$

6. dla ostatniej obligacji mamy następujące wypłaty:
3M: 5 zł
9M 5 zł
1,25Y: 5 zł
1,75Y: 5 zł
2,25Y: 5 zł
2,75Y: 105 zł
pierwszy kupon wiemy jak dyskontować, pozostałe natomiast nie. Znamy jednak stopy spot $r(0{,}5)$, $r(1{,}0)$, $r(1{,}5)$, $r(2{,}0)$ zatem możemy dokonać interpolacji (np. interpolacji liniowej) i wyznaczyć stopy spot $r(0{,}75)$, $r(1{,}25)$, $r(1{,}75)$:
9M: $1/2 \cdot (0{,}1047+0{,}1054) = 0{,}1051$
1,25Y: $1/2 \cdot (0{,}1054 + 0{,}1068) = 0{,}1061$
1,75Y: $1/2 \cdot (0{,}1068 + 0{,}1081) = 0{,}1075$
Dla ostatniej obligacji mamy 4 nominalne przepływy (do 1,75r włącznie). Wyznaczmy zatem ich wartość dzisiejszą

$$5e^{-0{,}1013\cdot 0{,}25} + 5e^{-0{,}1051\cdot 0{,}75} + 5e^{-0{,}1061\cdot 1{,}25} + 5e^{-0{,}1075\cdot 1{,}75} = 18{,}02 \text{ zł}$$

Wartość dzisiejsza 2 ostatnich przepływów wynosi zatem

$$99{,}80 - 18{,}02 = 81{,}78$$

Znamy stopę spot $r(2)$; przypuśćmy, że dla zapadalności 2,75r stopa spot wynosi $r(2{,}75)$, zatem interpolacja liniowa stopy spot $r(2{,}25)$ będzie wynosić:

$$\frac{2}{3}\cdot r(2) + \frac{1}{3}\cdot r(2{,}75) = \frac{2}{3}\cdot 0{,}1081 + \frac{r(2{,}75)}{3} = 0{,}0721 + \frac{r(2{,}75)}{3}$$

czyli wiemy jak będziemy dyskontować przepływ za 2 lata i 3 miesiące oraz za 2 lata i 9 miesięcy. Zatem wartość obecna pozostałych dwóch przepływów wynosi

$$5e^{-(0{,}0721+r(2{,}75)/3)\cdot 2{,}25} + 105e^{-r(2{,}75)\cdot 2{,}75} = 81{,}78$$

stąd stopa spot za 2 lata i 9 miesięcy wynosi $r(2{,}75) = 0{,}1087$. Możemy teraz powrócić do wyznaczenia stopy spot za 2 lata i 3 miesiące:

$$r(2{,}25) = 0{,}0721 + \frac{r(2{,}75)}{3} = 10{,}83\%$$

Obserwacja i analiza kwotowanych obligacji kuponowych powoduje, że możemy metodą bootstrapu wyznaczyć krzywą *spot*. Krzywa *spot* jest ważnym narzędziem do zarządzania ryzykiem stopy procentowej.

3.2. Stopa forward i krzywa forward

Zauważmy, że gdy mamy k stóp spot $r(1), r(2), \ldots, r(k)$ to możemy wygenerować $\frac{k(k+1)}{2}$ stóp forward:

$$\begin{array}{cccccccc}
f(0,1) & f(0,2) & f(0,3) & \cdots & f(0,k-2) & f(0,k-1) & f(0,k) \\
f(1,2) & f(1,3) & f(1,4) & \cdots & f(1,k-1) & f(1,k) & \\
f(2,3) & f(2,4) & f(2,5) & \cdots & f(2,k) & & \\
\vdots & \vdots & & & & & \\
f(k-2,k-1) & f(k-2,k) & & & & & \\
f(k-1,k) & & & & & &
\end{array}$$

Widzimy, że kolumnie 1 mamy roczne stopy forward, w drugiej 2-letnie stopy forward, etc. Widzimy również, że w pierwszym wierszu mamy stopy forward startujące dzisiaj, czyli tak naprawdę stopy spot. W drugim wierszu, stopy forward startujące za rok, w trzecim stopy forward startujące za 2 lata, etc.
Oczywiście dla każdej z tych kombinacji stóp forward można wyznaczyć odpowiednią krzywą forward.

Teraz pokażemy jeszcze ważną zależność pomiędzy stopami spot a rocznymi stopami forward. Prześledźmy następujący przykład.

Przykład 3.2 Załóżmy, że roczna stopa spot $r(1) = 8{,}0\%$ a 2-letnia stopa spot $r(2) = 9{,}0\%$. Możemy łatwo obliczyć (zależność (1.41)), że stopa forward $f(1,2) = 10{,}009\%$. Powstaje naturalne pytanie: czy w ogólnym przypadku, jeśli $r(t_1) < r(t_2)$ to $r(t_2) < f(t_1, t_2)$?

Odpowiedź jest twierdząca. Jeśli $r(t_1) < r(t_2)$ to również $1+r(t_1) < 1+r(t_2)$. Pomnóżmy obie strony tej nierówności przez $1 + r(t_2)$. Wtedy dalej mamy zachowany znak

$$(1 + r(t_1))(1 + r(t_2)) < (1 + r(t_2))^2 \tag{3.2}$$

i możemy na mocy (1.40) napisać

$$(1+r(t_1))(1+r(t_2)) < (1+r(t_2))^2 = (1+r(t_1))(1+f(t_1,t_2)) \tag{3.3}$$

co oznacza, że

$$1+r(t_2) < 1+f(t_1,t_2) \tag{3.4}$$

i w konsekwencji prowadzi do zależności $r(t_2) < f(t_1,t_2)$. Co oznacza, że jeśli krzywa spot jest rosnąca to roczna krzywa forward leży powyżej krzywej spot. □

Zauważmy, że wniosek z przykładu możemy uzyskać w inny sposób. Otóż zależność (1.56) możemy zapisać

$$\begin{aligned} f(t_1,t_2) &= \frac{r(t_2)t_2 - r(t_2)t_1 + r(t_2)t_1 - r(t_1)t_1}{t_2-t_1} \\ &= \frac{r(t_2)(t_2-t_1) + r(t_2)t_1 - r(t_1)t_1}{t_2-t_1} \\ &= r(t_2) + \frac{r(t_2)-r(t_1)}{t_2-t_1}t_1 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Zależność (3.5) pokazuje, że jeśli krzywa spot jest rosnąca to krzywa forward leży powyżej krzywej spot.

3.3. Krzywa par

Pokażemy, jeszcze, że gdy mamy rosnącą krzywą spot to krzywa par leży poniżej krzywej spot. Załóżmy, że mamy obligację 2-letnią płacącą stały kupon C raz do roku $m=1$. Załóżmy, że znamy stopy spot $r(1)$ oraz $r(2)$. Możemy zapisać z definicji

$$P = F = \frac{c(2)F}{(1+r(1))} + \frac{c(2)F+F}{(1+r(2))^2} \tag{3.6}$$

Po podzieleniu przez F obu stron równania (3.6) przez F dostaniemy

$$1 = \frac{c(2)}{(1+r(1))} + \frac{c(2)+1}{(1+r(2))^2} \tag{3.7}$$

co jest równoważne

$$(1+r(2))^2 = c(2)\frac{(1+r(2))^2}{(1+r(1))} + c(2) + 1 \tag{3.8}$$

Pamiętamy, że $(1+r(2))^2 = (1+r(1))(1+f(1,2))$ i stąd zależność (3.8) można przedstawić

$$(1+r(2))^2 = c(2)(1+f(1,2)) + c(2) + 1 \tag{3.9}$$

i rozwiązując (3.9) względm $c(2)$ dostajemy

$$c(2) = r(2)\frac{2 + r(2)}{2 + f(1, 2)} \tag{3.10}$$

Pamiętamy, że krzywa spot jest rosnąca, co oznacza, że $r(2) < f(1, 2)$ zatem ułamek w zależności (3.10) jest mniejszy od 1, co w konsekwencji prowadzi do relacji $c(2) < r(2)$.

3.4. Teorie struktury terminowej stopy procentowej

Aby pokazać jak pewne teorie tłumaczą kształt krzywej dochodowości, musimy sobie najpierw odpowiedzieć na kilka zagadnień związanych z ryzykiem stopy procentowej. We współczesnych finansach ryzyko jest podstawowym pojęciem. Aby mówić o ryzyku musimy podać jego definicję, dokonać jego klasyfikacji czy identyfikacji oraz podać cechy charakterystyczne.

Najogólniej ryzyko można podzielić na 2 rodzaje:
- systematyczne (rynkowe) – wynik działania sił zewnętrznych,
- niesystematyczne – specyficzne dla danego podmiotu.

Ten podział sugeruje, że ryzyko stopy procentowej jest ryzykiem systematycznym.

Bardziej dokładną klasyfikację ryzyka możemy podać za Bankiem Międzynarodowych Rozliczeń z siedzibą w Bazylei (Bank of International Settlement BIS, www.bis.org):
1. ryzyko kredytowe – niebezpieczeństwo niewywiązania się partnera transakcji z jego zobowiązań,
2. ryzyko rynkowe – możliwość zmiany warunków finansowych w wyniku zmian cen rynkowych np. stopy procentowej, kursu walutowego, etc.,
3. ryzyko płynności
   — związane z konkretnym instrumentem finansowym lub rynkiem,
   — związane z wypłacalnością danej instytucji,
4. ryzyko operacyjne – zagrożenie nie osiągnięcia zamierzonych celów — błędy pracowników, systemu informacyjnego, etc.,
5. ryzyko prawne – ryzyko straty z powodu nie przeprowadzenia transakcji — przepisy prawne, niewystarczające dokumenty, etc.

Możemy zauważyć, ze ta klasyfikacja nie jest w pełni rozłączna.

Odpowiedzmy sobie teraz na pytanie, jakie czynniki wpływają na nominalną stopę procentową r, czyli złotówki w ujęciu bieżącym. Dokonajmy zatem identyfikacji ryzyka stopy procentowej:

1. realna stopa procentowa r_r (*real interest rate*)
cena pieniądza w warunkach równowagi między podażą (kredytodawcami) a popytem (kredytobiorcami); oddaje istotę wartości pieniądza w czasie; jest rekom-

pensatą za odsunięcie konsumpcji w czasie; przedstawia złotówki w ujęciu stałym,

2. stopa inflacji r_i (*inflation rate*)
inflacja implikuje wzrost cen, r_i jest rekompensatą za odłożenie konsumpcji w czasie,
3. premia za ryzyko r_{rp} (*risk premium*)
przyszła wypłata jest tylko obietnicą, stąd ryzyko jej niedotrzymania,
4. premia płynności r_{lp} (*liquidity premium*)
preferujemy instrumenty o krótszym terminie zapadalności.

Sumując te czynniki i biorąc kapitalizację roczną otrzymamy:

$$1 + r = (1 + r_r)(1 + r_i)(1 + r_{rp})(1 + r_{lp}) \tag{3.11}$$

Mnożąc prawą stronę i odrzucając wyrazy wyższego rzędu oraz upraszczając 1, otrzymujemy

$$r = r_r + r_i + r_{rp} + r_{lp} \tag{3.12}$$

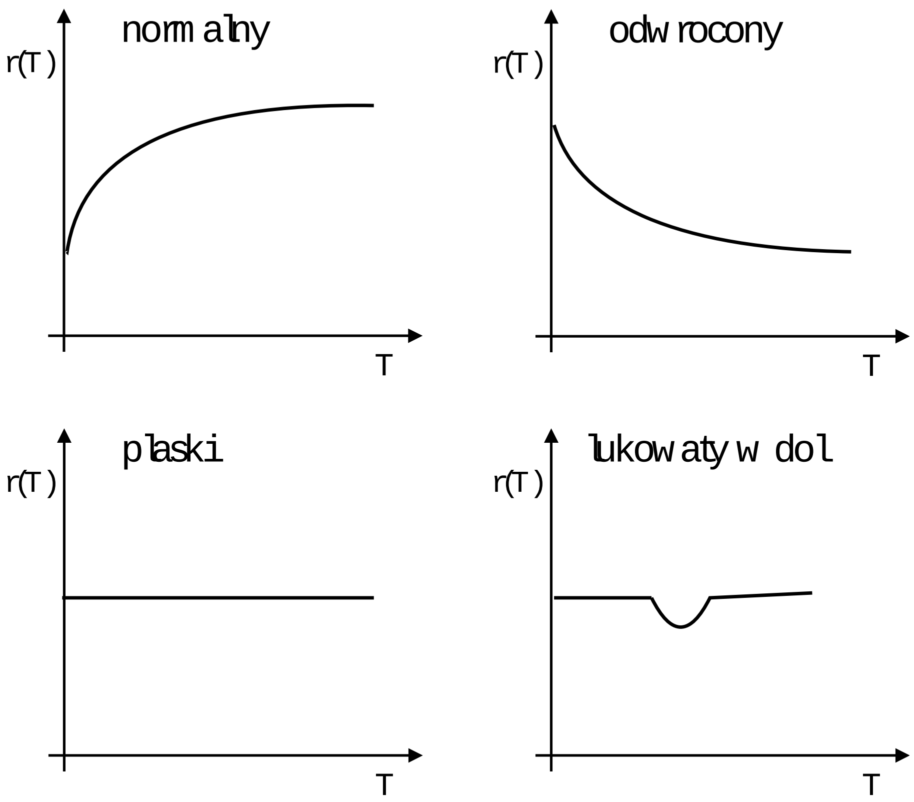
Oczywiście pamiętamy, że nominalna stopa procentowa r zależy od czasu $r = r(T)$.

W finansach wyróżniamy kilka podstawowych kształtów krzywej dochodowości:
- normalny ($T \nearrow \Longrightarrow r(T) \nearrow$),
- odwrócony ($T \nearrow \Longrightarrow r(T) \searrow$),
- płaski (dla dowolnego T, $r(T) = const$),
- łukowaty w górę lub w dół.

Oczywiście, na rynku można spotkać również inne kształty, jednak te wymienione powyżej są najbardziej znane.

Istnieją trzy podstawowe teorie tłumaczące kształt struktury czasowej stóp procentowych.

1. teoria oczekiwań (*expectations theory*)
mówi o przewidywaniach inwestorów co do przyszłych stóp procentowych; stopy forward odzwierciedlają oczekiwany poziom stóp; mamy też oczekiwania co do stopy inflacji,
2. teoria preferencji płynności (*liquidity preference theory*)
wiemy, że kredytodawcy wolą krótki termin, natomiast kredytobiorcy wolą dłuższy termin; stąd papier o dłuższym terminie zapadalności powinien mieć wyższą stopę dochodu niż papier o krótkim terminie
3. teoria segmentacji rynku (*market segmentation theory*)
rynek podzielony jest na segmenty – papiery o tym samym terminie wykupu; segmenty nie zależą od siebie; stopy dochodu w segmencie kształtowane są tylko i wyłącznie przez podaż i popyt;
przykładowo: banki preferują *krótki koniec* krzywej dochodowości , fundusze emerytalne, natomiast *długi koniec* krzywej dochodowości.



Rysunek 3.1. Typowe kształty krzywej dochodowości.

Na kształt krzywej mają wpływ też czynniki makroekonomiczne. Przykładowo, na wzrost stóp rynkowych mają wpływ:

- spadek podaży pieniądza,
- wzrost cen hurtowych PPI i detalicznych CPI,
- wzrost indeksu zamówień na dobra trwałego użytku,
- wzrost aktywności sektora budowlanego,
- wzrost głównych wskaźników gospodarczych (np. PKB, produkcji przemysłowej),
- wzrost dochodów osobistych,
- wzrost cen ropy,
- spadek bezrobocia.

Rozdział 4

Ryzyko stopy procentowej

4.1. Ryzyko inwestowania w obligacje

> Mój klient nie był zadowolony ze straty, ale była to tak samo jego wina, jak i moja. Prawo rynku obligacji brzmi *caveat emptor*, czyli "nabywco, strzeż się sam". Kiedyś usłyszałem też zdanie *meum dictum pactum*, ale to był tylko żart. Oznaczało ono: "moje słowo jest moim zobowiązaniem". To znaczy, że nie musiał mi wierzyć, gdy mówiłem mu, że zakup obligacji AT&T to dobry pomysł.
>
> Michael Lewis, *Poker kłamców. Wspinaczka po ruinach Wall Street*, Wydawnictwo W.A.B., Warszawa, 1993.

Tak jak każda inwestycja na rynku finansowym, również inwestycja w obligacje jest obarczona ryzykiem. Można wyróżnić trzy podstawowe rodzaje ryzyka związane z inwestowaniem w obligacje:
1. ryzyko niedotrzymania warunków (*default risk*) przez emitenta obligacji,
2. ryzyko zmiany ceny (*risk price*) zwane inaczej ryzykiem okresu posiadania (*holding period risk*),
3. ryzyko reinwestowania (*reinvestment risk*).

Ryzyko niedotrzymania warunków występuje wtedy, gdy emitent obligacji nie wypłaca odsetek lub nie wykupuje obligacji w terminie. Ryzyko to występuje przy obligacjach emitowanych przez każdego z uczestników rynku kapitałowego. Ryzyko niedotrzymania warunków przez emitenta jest wyceniane przez agencje ratingowe, takie jak: Standard&Poor's, Moody's czy Fitch (tab. 4.1). Emitenci o najwyższym ratingu pożyczają pieniądze taniej na rynku niż emitenci o niższych ratingach.

Ryzyko zmiany ceny występuje gdy obligatariusz zamierza sprzedać obligację przed terminem wykupu. Zmiany rynkowych stóp procentowych powodują zmiany wartości obligacji.

W analizowanych poniżej przykładach założymy, że:
- nie ma podatków,
- nie ma kosztów transakcji,
- aktywa są doskonale podzielne.

Tabela 4.1. Klasyfikacja ratingów.

	Moody's	Standard & Poor's
wysoka wycena	Aaa	AAA
	Aa	AA
średnia wycena	A	A
	Baa	BBB
wycena spekulacyjna	Ba	BB
	B	B
ryzyko niewypłacalności	Caa	CCC
	Ca	CC
	C	C
		D

Rozważmy inwestycje w papier 0-kuponowy polegające na ich sprzedaży przed ich zapadalnością. W takiej sytuacji stopa zwrotu z naszej inwestycji będzie zależała od stóp rynkowych w chwili zamykania pozycji.

Przykład 4.1 Kupujemy 26-tygodniowy bon skarbowy na przetargu o wartości nominalnej 100 zł za 96 zł, co implikuje półroczną stopę spot $r(0{,}5)$ (i tym samym YTM tego bonu)

$$r(0{,}5) = \frac{1}{26/52}\frac{100}{96} = 8{,}33\%$$

Gdybyśmy trzymali bon skarbowy do wykupu, to zrealizowana stopa zwrotu wynosiłaby właśnie 8,33%.

Załóżmy jednak, że musimy sprzedać ten bon na 13 tygodni przed wykupem (0,25 roku). Rozważmy dwa scenariusze (zakładamy dla uproszczenia, że mamy cały czas płaską krzywą spot):

- rynkowe stopy (w szczególności interesująca nas 3-miesięczna stopa) spadają o 200 punktów bazowych i teraz $r(0{,}25) = 6{,}33\%$,
- rynkowe stopy rosną o 200 punktów bazowych, czyli $r(0{,}25) = 10{,}33\%$.

W pierwszym przypadku, możemy sprzedać bon za

$$\frac{100}{1 + 0{,}0633 \cdot 0{,}25} = 98{,}44 \text{ zł}.$$

Co oznacza, że zrealizowana stopa zwrotu z inwestycji w bon wynosi 10,15%.

W drugim przypadku, możemy sprzedać bon za

$$\frac{100}{1 + 0{,}1033 \cdot 0{,}25} = 97{,}48 \text{ zł}.$$

Co oznacza, że zrealizowana stopa zwrotu wynosi 6,17%. □

Przykład pokazuje, że sprzedaż bonu skarbowego przed terminem wykupu, może powodować, że zrealizowana stopa zwrotu może być inna niż stopa rynkowa, przy której dokonano inwestycji. Zabezpieczenie stopy zwrotu daje przetrzymanie bonu do terminu wykupu.

Ryzyko reinwestowania kuponów występuje gdy inwestujemy otrzymane odsetki od obligacji po stopie innej niż stopa YTM na początku inwestycji.

Przykład 4.2 Rozważmy 3-letnią obligację o stałych kuponach, cenie nominalnej $F = 100$ zł, oprocentowaną w wysokości $c = 6\%$ p.a., odsetkach wypłacanych raz do roku, $m = 1$. Cena obligacji $P = 97{,}38$ zł, co oznacza, że stopa zwrotu w terminie do wykupu tej obligacji $YTM = 7\%$. Załóżmy, że inwestujemy w taką właśnie obligację.

Jeśli stopa rynkowa się nie zmieni, czyli reinwestujemy odsetki po stopie 7%, to po 3 latach mamy wartość naszej inwestycji

$$V_3 = 6 \cdot (1{,}07)^2 + 6 \cdot 1{,}07 + 106 = 119{,}29\text{zł}$$

Rozważmy teraz 2 alternatywne scenariusze:

1. po roku stopa spada o 200 pb do 5%, a po kolejnym roku rośnie o 400 pb do poziomu 9%.
   Spadek stóp rynkowych powoduje, że po roku cena obligacji wynosi $P_1 = 101{,}86$ zł. Zatem możemy kupić za odcięty kupon $6/101{,}86 = 0{,}059$ obligacji, czyli mamy teraz 1,059 obligacji.
   Po kolejnym roku wzrost stóp rynkowych powoduje, że cena obligacji wynosi $P_2 = 97{,}25$ zł. Oznacza to, że za kolejny kupon w wysokości $6 \cdot 1{,}059 = 6{,}354$ zł możemy teraz kupić $6{,}354/97{,}25 = 0{,}065$ obligacji. Czyli po dwóch latach mamy 1,124 obligacji.
   Po 3 roku mamy więc wypłatę $1{,}124 \cdot 106 = 119{,}14$ zł i to jest wartość naszej inwestycji.
2. po roku stopa rośnie o 200 pb do 9%, a po kolejnym roku spada o 400 pb do poziomu 5%.
   Wzrost stóp rynkowych powoduje, że po roku cena obligacji wynosi $P_1 = 94{,}72$ zł. Zatem możemy kupić za odcięty kupon $6/94{,}72 = 0{,}063$ obligacji, czyli mamy teraz 1,063 obligacji.
   Po kolejnym roku spadek stóp rynkowych powoduje, że cena obligacji wynosi $P_2 = 100{,}95$ zł. Oznacza to, że za kolejny kupon w wysokości $6 \cdot 1{,}063 = 6{,}378$ zł możemy kupić $6{,}378/100{,}95 = 0{,}063$ obligacji. Czyli po dwóch latach mamy 1,128 obligacji.
   Po 3 roku wartość naszej inwestycji wynosi $1{,}128 \cdot 106 = 119{,}57$ zł.

$\square$

Widzimy, na tym przykładzie, że w drugim scenariuszu mamy największą wartość naszej inwestycji w obligację. Wzrost rynkowej stopy procentowej po roku, spowodował spadek cen obligacji i umożliwił kupno większej liczby tych obligacji za wypłacone kupony.

Przeanalizujmy jeszcze jeden przykład, w którym inwestujemy w obligację z kuponami, którą sprzedamy przed terminem wykupu.

Przykład 4.3 Rozważmy teraz 5-letnią obligację o stałych kuponach, cenie nominalnej $F = 100$ zł, oprocentowaną w wysokości $c = 6\%$ p.a., odsetkach wypłacanych raz do roku, $m = 1$. Cena obligacji $P = 95{,}90$ zł, co oznacza, że stopa zwrotu w terminie do wykupu tej obligacji $YTM = 7\%$. Załóżmy, że inwestujemy w taką obligację.

Jeśli stopa rynkowa się nie zmieni, czyli reinwestujemy kupony po stopie 7%, to po 3 latach wartość inwestycji w obligację wyniesie

$$V_3 = 6 \cdot (1{,}07)^2 + 6 \cdot 1{,}07 + 6 + \frac{6}{1 + 0{,}07} + \frac{106}{(1 + 0{,}07)^2} = 117{,}48 \text{ zł}$$

Rozważmy teraz 2 scenariusze:

1. po roku stopa spada o 200 pb do 5%, a po kolejnym roku rośnie o 400 pb do poziomu 9% i pozostaje na tym poziomie do końca inwestycji.
   Spadek stóp rynkowych powoduje, że po roku cena obligacji wynosi $P_1 = 103{,}55$ zł. Zatem możemy kupić za odcięty kupon $6/103{,}55 = 0{,}058$ obligacji, czyli mamy teraz 1,058 obligacji.
   Po kolejnym roku wzrost stóp rynkowych powoduje, że cena obligacji wynosi $P_2 = 92{,}41$ zł. Oznacza to, że za kolejny kupon w wysokości $6 \cdot 1{,}058 = 6{,}348$ zł możemy teraz kupić $6{,}348/92{,}41 = 0{,}069$ obligacji. Czyli po dwóch latach mamy 1,127 obligacji.
   Po 3 roku mamy wypłatę odsetek w wysokości $1{,}127 \cdot 6 = 6{,}76$ zł. Teraz również sprzedajemy obligację. W tym momencie, do zapadalności pozostało 2 lata, YTM wynosi 9%, zatem cena takiej obligacji $P_3 = 94{,}72$ zł. Mamy 1,127 obligacji, zatem wartość inwestycji wynosi 106,72 zł.
   Całkowita wartość naszej inwestycji w obligację wynosi
   $$V_3 = 6{,}76 + 106{,}72 = 113{,}48 \text{ zł}.$$
2. po roku stopa rośnie o 200 pb do 9%, a po kolejnym roku spada o 400 pb do poziomu 5% i pozostaje na tym poziomie do końca inwestycji.
   Wzrost stóp rynkowych powoduje, że po roku cena obligacji wynosi $P_1 = 90{,}28$ zł. Zatem możemy kupić za odcięty kupon $6/90{,}28 = 0{,}066$ obligacji, czyli mamy teraz 1,066 obligacji.
   Po kolejnym roku spadek stóp rynkowych powoduje, że cena obligacji wynosi teraz $P_2 = 102{,}72$ zł. Oznacza to, że za kolejny kupon w wysokości $6 \cdot 1{,}066 = 6{,}396$ zł możemy teraz kupić $6{,}396/102{,}72 = 0{,}062$ obligacji. Czyli po dwóch latach mamy 1,128 obligacji.
   Po 3 roku mamy wypłatę odsetek w wysokości $1{,}128 \cdot 6 = 6{,}77$ zł. Teraz również sprzedajemy obligację. W tym momencie, do zapadalności pozostało 2 lata, YTM wynosi 5%, zatem cena takiej obligacji $P_3 = 101{,}86$ zł. Mamy 1,128 obligacji, zatem wartość inwestycji wynosi 114,97 zł.
   Całkowita wartość naszej inwestycji w obligację wynosi
   $$V_3 = 6{,}77 + 114{,}97 = 121{,}746 \text{ zł}.$$

□

Również i w tym przypadku, gdy rozważamy obligacje z kuponami o dłuższym okresie zapadalności, wartość inwestycji zależy istotnie od scenariusza jaki nakreśli rynek stóp procentowych, jak i od faktu, że czas pozostający do zapadalności obligacji zmienia się.

W takiej sytuacji bardzo ważnym staje się problem ryzyka stopy procentowej, a w konsekwencji problem zarządzania portfelem obligacji. W następnym rozdziale omówimy niektóre z metod zarządzania portfelem obligacji, a później dokonamy pewnej systematyki.

Zacznijmy omawianie strategii inwestowania w portfel obligacji od strategii strukturalnych, wśród których najbardziej popularną jest immunizacja (uodpornienie) portfela (*portfolio immunization*). Jednak aby móc przedstawić ten problem musimy wprowadzić pojęcie duration obligacji.

4.2. 1-czynnikowe miary zmienności cen obligacji

Ryzyko stopy procentowej papieru dłużnego może być rozważane jako zmiana ceny papieru za względu na zmianę stopy zwrotu w terminie do wykupu YTM. Miary wrażliwości ceny są używane na różne sposoby. Zobaczmy najpierw w jaki zmienia się cena obligacji w zależności od zmian YTM. Weźmy pod uwagę 4 obligacje o różnym oprocentowaniu (4% oraz 13%) oraz różnym czasie zapadalności (5 lat oraz 20 lat) mające to samo wyjściowe $YTM = 7\%$. Załóżmy też, że obligacje wypłacają raz do roku kupon m=1. Zobaczmy jaka będzie procentowa zmiana ceny tych obligacji w stosunku do ceny wyjściowej, jeśli założymy nowe YTM równe odpowiednio 3%, 6%, 6,99%, 7,01%, 8% oraz 11%

Tabela 4.2. Procentowa zmiana ceny 4 obligacji o różnym oprocentowaniu i okresie zapadalności dla początkowego YTM=7%

nowe YTM	zmiana YTM w pb.	4%/5 (%)	4%/20 (%)	13%/5 (%)	13%/20 (%)
3,00%	-400	19,25	68,40	17,01	52,10
6,00%	-100	4,42	12,96	3,92	10,23
6,99%	-1	0,04	0,12	0,04	0,10
7,01%	+1	-0,04	-0,12	-0,04	-0,09
8,00%	+100	-4,19	-10,98	-3,72	-8,85
11,00%	+400	-15,47	-35,12	-13,81	-29,12

4.3. Wartość cenowa punktu bazowego

Wartość cenowa punktu bazowego(*price value of a basis point*) określana również mianem **nominalnej wartości punktu bazowego** (*dollar value of a basis point*) DV01 mówi, o ile zmieni się cena obligacji przy zmianie stopy zwrotu w terminie do wykupu o 1 punkt bazowy

$$DV01 = -\frac{\Delta P}{10\,000 \cdot \Delta YTM} \tag{4.1}$$

4.4. Duration obligacji

Pokazaliśmy wcześniej, że obligacje o długim okresie zapadalności mają bardziej stromą krzywą YTM-P niż obligacje o krótkim okresie. Zatem te pierwsze są bardziej wrażliwe na zmiany rynkowych stóp procentowych niż te drugie. Ale okres zapadalności nie jest najlepszą miarą wrażliwości obligacji. Lepszą miarą wrażliwości na zmianę stopy procentowej jest **duration** obligacji. Ogólnie, duration instrumentu o stałym dochodzie jest średnią ważoną chwil czasowych, w których dokonywane są płatności gotówkowe. Wagami są wartości dzisiejsze poszczególnych przepływów gotówkowych.

Możemy naszą intuicyjną definicję zapisać bardziej formalnie. Przypuśćmy, że przepływy gotówkowe otrzymywane są w chwilach $t_1, t_2, \ldots, t_n$. Wtedy duration takiego strumienia płatności dane jest następująco

$$D = \frac{PV(t_1) \cdot t_1 + PV(t_2) \cdot t_2 + \cdots + PV(t_n) \cdot t_n}{PV} \tag{4.2}$$

gdzie:
$PV(t_i)$ oznacza wartość dzisiejszą płatności, która występuje w chwili t_i, natomiast PV wartość dzisiejszą strumienia płatności, czyli w naszym wypadku cenę obligacji.

W tym momencie nie precyzujemy w jaki sposób są dyskontowane przyszłe płatności. Za chwilę, będziemy dyskontować te przepływy stopą YTM (duration Macaulay'a), a w dalszej części wykładu pokażemy dyskontowanie takich przepływów stopą *spot* (duration Fishera-Weila).

Przy tak wprowadzonej definicji, duration jest średnią ważoną chwil, w których występują przepływy gotówkowe. Dla obligacji będzie spełniona zależność $t_1 \leqslant D \leqslant t_n$. Zatem duration jest czasem pomiędzy pierwszą i ostatnią płatnością.

Widać od razu, że duration obligacji 0-kuponowej jest równe okresowi zapadalności tej obligacji. Natomiast obligacja kuponowa ma duration mniejsze niż czas zapadalności. Zatem duration może być postrzegane jako uogólniona miara zapadalności obligacji.

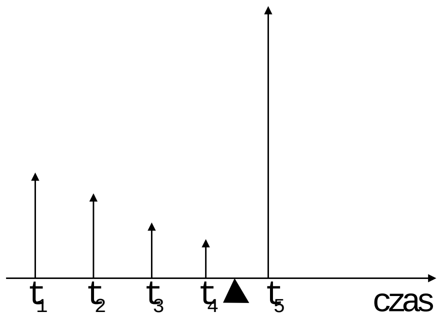
4.4.1. Duration obligacji w modelu kapitalizacji ciągłej

Wprowadźmy pojęcie duration najpierw dla modelu kapitalizacji ciągłej. W tym modelu wypłacane kupony są dyskontowane stopą zwrotu w terminie do wykupu YTM i wtedy cena obligacji wynosi

$$P(0,T) = \sum_{i=1}^{n} C_i/m \cdot \mathrm{e}^{-y \cdot t_i} + F\mathrm{e}^{-y \cdot t_n} \tag{4.3}$$

gdzie $y = YTM$.
Definiujemy *duration* następująco

$$D := \frac{1}{P}\Big(\sum_{i=1}^{n} t_i \cdot C_i/m \cdot e^{-y \cdot t_i} + t_n \cdot F\mathrm{e}^{-yt_n}\Big) \tag{4.4}$$



Rysunek 4.1. Interpretacja geometryczna duration.

Zapiszmy wprowadzoną definicję inaczej

$$D = \sum_{i=1}^{n} t_i \frac{C_i \cdot e^{-y \cdot t_i}}{P} \tag{4.5}$$

czyli

$$D = \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot w_i \tag{4.6}$$

gdzie współczynnik

$$w_i = \frac{C_i \cdot e^{-y \cdot t_i}}{P} \qquad 1 \leqslant i \leqslant n$$

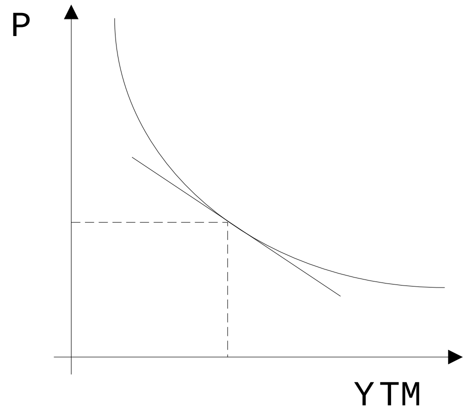
jest wagą, bo $\sum_1^n w_i = 1$.
Zatem duration definiuje średni ważony czas do terminu wykupu obligacji, jak pokazaliśmy na rys. 4.1.

Duration ma jednak drugą, znacznie ważniejszą interpretację. Na wstępie wspomnieliśmy, że duration ma związek z wrażliwością ceny obligacji na zmianę stopy zwrotu w terminie do wykupu YTM obligacji. Wiemy, że cena obligacji P jest funkcją trzech parametrów $P = f(y, T, c_i)$.
Policzmy pochodną ceny obligacji P względem stopy zwrotu w terminie do wykupu y

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\sum_{i=1}^{n} t_i \cdot C_i \cdot e^{-y \cdot t_i} \tag{4.7}$$

Porównując obliczoną zależność z wyrażeniem na duration obligacji (4.4) otrzymujemy związek

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -D \cdot P \tag{4.8}$$



Rysunek 4.2. Lokalna aproksymacja zależności ceny obligacji od stopy zwrotu w terminie do wykupu.

Dla małych zmian ceny P oraz stopy zwrotu w terminie do wykupu $y = YTM$ mamy

$$\frac{\Delta P}{\Delta y} = -D \cdot P \tag{4.9}$$

czyli

$$\frac{\Delta P}{P} = -D \cdot \Delta y \tag{4.10}$$

lub

$$\Delta P = -D \cdot P \cdot \Delta y \tag{4.11}$$

Czyli zmiana ceny obligacji wyraża się wartością duration tej obligacji. Zobaczmy jak pracuje ta zależność na przykładzie.

Przykład 4.4 Załóżmy, że mamy obligację o następujących parametrach: czas zapadalności T=3 lata, oprocentowanie obligacji $c = 10\%$ p.a., kupony są wypłacane dwa razy w roku, m=2. Niech cena tej obligacji wynosi $P = 94{,}21$, zatem stopa zwrotu w terminie do wykupu wynosi y=12%. Duration takiej obligacji wynosi zatem D=2,65 lata.

Podstawiając nasze obliczenia do zależności (4.11), mamy

$$\Delta P = -2{,}65 \cdot 94{,}21 \cdot \Delta y$$

czyli

$$\Delta P = -249{,}95 \cdot \Delta y \tag{4.12}$$

Jeśli teraz rośnie stopa zwrotu w terminie do wykupu o 10 punktów bazowych, czyli przyrost $\Delta y = 0{,}001$, zatem w myśl zależności (4.12) zmiana ceny obligacji wyniesie $\Delta P = -0{,}25$. Jeśli nowa stopa zwrotu w terminie do wykupu wynosi $y = 0{,}121$ (12,1%), to cena obligacji wynosi

$$P = 94{,}21 - 0{,}25 = 93{,}96.$$

Sprawdźmy czy rzeczywiście zależność (4.12) dobrze oddaje zmianę ceny. Podstawiając nową wartość y do wzoru na wycenę obligacji dostaniemy dokładnie to samo. Możemy to sprawdzić, dokonując obliczeń w run:plik6.xlsarkuszu.

Zależność (4.12) pracuje równie dobrze, gdy stopa zwrotu w terminie do wykupu YTM spada o mała wartość. Załóżmy teraz, że y spada o 10 punktów bazowych, czyli $\Delta y = -0{,}001$, zatem nowe $y = 0{,}119$ (11,9%). Stąd $\Delta P = 0{,}25$ czyli cena obligacji wynosi

$$P = 94{,}21 + 0{,}25 = 94{,}46$$

Zależność (4.12) nie pracuje dobrze dla dużych zmian Δy. Przykładowo, gdy stopa rośnie o 200 punktów bazowych, czyli $\Delta y = 0{,}02$, nowe $y = 0{,}14$ (14%), a stąd $\Delta P = -5{,}00$. Czyli nowa cena obligacji

$$P = 94{,}21 - 5 = 89{,}21$$

Poprawna cena obligacji to $P = 89{,}35$. Podobnie gdy stopa zwrotu w terminie do wykupu YTM spada o 200 punktów bazowych. Wtedy $\Delta y = -0{,}02$, $y = 0{,}10$ (10%), $\Delta P = 5{,}00$ czyli nowa cena obligacji

$$P = 94{,}21 + 5 = 99{,}21$$

Jednak poprawna cena - wyliczona z formuły zdyskontowanych przepływów gotówkowych - to P=99,36. □

Pokazaliśmy w przykładzie, że dla małych zmian stopy zwrotu w terminie do wykupu y, zależność (4.11) dobrze opisuje zmiany ceny obligacji. Natomiast dla dużych zmian ta zależność nie pracuje tak dobrze. Duration zatem aproksymuje krzywa YTM-P tylko lokalnie - w małym otoczeniu y. Ponieważ nachylenie stycznej do krzywej YTM-P jest dane zależnością $-D \cdot P$, bo mamy równanie

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -D \cdot P \tag{4.13}$$

4.4.2. Duration obligacji w modelu kapitalizacji dyskretnej

Dla modelu dyskretnego mamy wzór na cenę obligacji

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{C/m}{(1+y/m)^i} + \frac{F}{(1+y/m)^n} \tag{4.14}$$

Obliczmy pochodną funkcji ceny obligacji P względem stopy zwrotu w terminie do wykupu y

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-1/m \cdot C/m}{(1+y/m)^2} + \frac{-2/m \cdot C/m}{(1+y/m)^3} + \cdots + \frac{-n/m \cdot C/m}{(1+y/m)^{n+1}} + \frac{-n/m \cdot F}{(1+y/m)^{n+1}} \tag{4.15}$$

wyłączymy czynnik $-\frac{1}{1+y/m}$ przed nawias i dostaniemy

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} \quad = \quad & -\frac{1}{1+y/m}\left(\frac{1/m \cdot C/m}{1+y/m} + \frac{2/m \cdot C/m}{(1+y/m)^2} + \cdots \right. \\ & \left. + \frac{n/m \cdot C/m}{(1+y/m)^n} + \frac{n/m \cdot F}{(1+y/m)^n}\right) \end{aligned} \tag{4.16}$$

Teraz podzielmy obie strony równania (4.16) przez cenę P

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y}\frac{1}{P} &= -\frac{1}{1+y/m}\Big(\frac{1/m \cdot C/m}{1+y/m} + \frac{2/m \cdot C/m}{(1+y/m)^2} + \cdots \\ &\quad + \frac{n/m \cdot C/m}{(1+y/m)^n} + \frac{n/m \cdot F}{(1+y/m)^n}\Big)\frac{1}{P} \qquad (4.17)\end{aligned}$$

Wyrażenie w nawiasie (4.17) podzielone przez cenę P definiuje duration obligacji

$$\begin{aligned}D &= \frac{1}{m}\Big(\frac{1 \cdot C/m}{1+y/m} + \cdots + \frac{n \cdot C/m}{(1+y/m)^n} + \frac{n \cdot F}{(1+y/m)^n}\Big)\frac{1}{P} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{i/m \cdot C/m}{(1+y/m)^i}\frac{1}{P} + \frac{n \cdot F}{(1+y/m)^n}\frac{1}{P} \qquad (4.18)\end{aligned}$$

Tak sformułowana definicja duration obligacji została podana przez Fredericka Macaulay'a w raporcie dla National Bureau of Economic Research w 1938 roku. Stąd czas trwania obligacji nazywamy duration Macaulay'a. Tak zdefiniowane duration wyrażone jest w latach. Gdy nie ma czynnika $\frac{1}{m}$ to mamy duration w okresach odsetkowych.
Wykorzystując definicję duration (4.18) dla modelu dyskretnego oraz zależność (4.17) mamy

$$\frac{\partial P}{\partial y}\frac{1}{P} = -\frac{1}{1+y/m}D \qquad (4.19)$$

czyli uzyskaliśmy prawie takie samo wyrażenie jak dla kapitalizacji ciągłej.
Aby mieć zgodność formuł dla modelu kapitalizacji ciągłej i dyskretnej musimy definicję (4.18) trochę poprawić.
Wprowadźmy pojęcie zmodyfikowanego *duration* D_{mod} (*modified duration*)[1]

$$D_{mod} = \frac{1}{1+y/m}D \qquad (4.20)$$

i wtedy

$$\frac{\partial P}{\partial y}\frac{1}{P} = -D_{mod} \qquad (4.21)$$

Charakter zależności (4.21) jest dokładnie taki sam jak wyrażenie (4.8) dla modelu ciągłego. Przykładowe obliczenia duration oraz zmodyfikowanego duration dla modelu dyskretnego można znaleźć w run:plik7.xlsarkuszu.

Duration można też liczyć korzystając ze wzoru na rentę okresową. Mieliśmy zależność

[1] Możemy spotkać też oznaczenia: D_M, MD lub $D^\star$.

wartość dzisiejsza strumienia płatności
=
wartość dzisiejsza renty okresowej
+
wartość dzisiejsza nominału

gdzie: wartość dzisiejsza renty okresowej =

$$PVA(y,n) = \frac{C}{y}\left(1 - \frac{1}{(1+y/m)^n}\right) \tag{4.22}$$

$$\text{wartość dzisiejsza nominału} = \frac{F}{(1+y/m)^n} \tag{4.23}$$

Policzmy wprost te zależności. Cenę obligacji możemy wyrazić

$$\begin{aligned} P &= \frac{C}{y}\left(1 - \frac{1}{(1+y/m)^n}\right) + \frac{F}{(1+y/m)^n} \\ &= \frac{C}{y} + \frac{1}{(1+y/m)^n}\left(F - \frac{C}{y}\right) \end{aligned} \tag{4.24}$$

Zróżniczkujmy teraz zależność (4.24) względem stopy zwrotu terminie do wykupu y i uwzględnijmy, że $n/m = T$

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dy} &= -\frac{C}{y^2} - \frac{n}{m}\left(1 + \frac{y}{m}\right)^{-n-1} \cdot \left(F - \frac{C}{y}\right) + \frac{1}{(1+\frac{y}{m})^n} \cdot \left(\frac{C}{y^2}\right) \\ &= -\frac{C}{y^2}\left(1 - \frac{1}{(1+y/m)^n}\right) - T\frac{F - C/y}{(1+y/m)^{n+1}} \end{aligned} \tag{4.25}$$

Korzystając z definicji zmodyfikowanego duration

$$D_{mod} = -\frac{1}{P}\frac{dP}{dy} \tag{4.26}$$

mamy

$$D_{mod} = -\frac{C}{y^2}\left(1 - \frac{1}{(1+y/m)^n}\right)\frac{1}{P} - T\frac{F - C/y}{(1+y/m)^{n+1}}\frac{1}{P} \tag{4.27}$$

Zauważmy również, że duration możemy wyrazić w następująco

$$D = (1+y/m)D_{mod} = -\frac{C}{y^2}\left(1 - \frac{1}{(1+y/m)^n}\right)\frac{1+y/m}{P} - T\frac{F - C/y}{(1+y/m)^n}\frac{1}{P} \tag{4.28}$$

Z zależności (4.27) płyną dwie ważne obserwacje:

1. dla obligacji po cenie *par*;
   wiemy że w takim przypadku oprocentowanie obligacji równe jest stopie zwrotu w terminie do wykupu $c = y$ co prowadzi do zerowania się drugiego składnika w zależności (4.27) bo

$$F - C/y = F - \frac{c \cdot F}{y} = F - F = 0$$

   i wtedy

$$D_{mod} = -\frac{cF}{y^2}\Big(1 - \frac{1}{(1+y/m)^n}\Big)\frac{1}{F} \tag{4.29}$$

   ze względu na fakt, że $P = F$

$$D_{mod} = -\frac{1}{y}\Big(1 - \frac{1}{(1+y/m)^n}\Big) \tag{4.30}$$

   a duration

$$D = -\frac{1+y/m}{y}\Big(1 - \frac{1}{(1+y/m)^n}\Big) \tag{4.31}$$

2. dla konsoli czyli obligacji o nieskończonym czasie zapadalności;
   zauważmy, że gdy $n \to \infty$ to cena obligacji $P = C/y$ oraz że drugi wyraz w zależności (4.27) dąży do 0; stąd

$$D_{mod} = C/y \tag{4.32}$$

   a duration

$$D = \frac{1+y/m}{y} \tag{4.33}$$

Mogłoby się wydawać, na pierwszy rzut oka, że obligacja kuponowa o nieskończonym czasie życia ma duration też nieskończone. Okazuje się jednak, że to nie jest prawdą bo dąży asymptotycznie do wartości $\frac{1+y/m}{y}$. Duration obligacji stabilizuje się na pewnej skończonej wartości.

Przykład 4.5 Rozważmy 30-letnią 0-kuponową obligację. Przypuśćmy, że stopa zwrotu w terminie do wykupu $y = 10\%$ p.a. Zatem duration tej obligacji wynosi D=30, a zmodyfikowane duration $D_M = 1/(1+0,1)D$= 27,3. Załóżmy teraz, że stopa zwrotu wzrasta o 100 punktów bazowych (pb), czyli o 1%. Zatem względna cena zmieni się o 27,3%. Długoterminowe 0-kuponowe papiery dłużne mają bardzo wysokie ryzyko stopy procentowej. □

Własności duration

Weźmy model ciągły wyceny obligacji z duration D, a dla modelu dyskretnego mamy zmodyfikowane duration D_{mod}. Zachodzą następujące zależności:

1. przy danym okresie do wykupu T i danej stopie zwrotu w terminie do wykupu YTM, im niższe oprocentowanie obligacji c tym większe duration D (zmodyfikowane duration D_{mod}),
2. przy danym oprocentowaniu obligacji c i danej stopie zwrotu w terminie do wykupu YTM, im dłuższy okres do wykupu T tym większe duration D (D_{mod}),
3. przy danym oprocentowaniu obligacji c i danym okresie do wykupu T, im niższa stopa zwrotu w terminie do wykupu YTM tym większe duration D (D_{mod}),

Ćwiczenie
Uzasadnić powyższe własności duration.

Praktycy rynku papierów dłużnych stosują jeszcze dwie inne miary wrażliwości obligacji. Pierwsza to wrażliwość (*sensitivity*) obligacji $\$dur$

$$\$dur = \frac{dP}{dy} \tag{4.34}$$

Inną klasyczną miarą jest wartość cenowa punktu bazowego (*price value of basis point*) PVBP[2]

$$DV01 = \frac{\$Dur}{10\,000} \tag{4.35}$$

Zauważmy, że wrażliwość obligacji możemy wyrazić w języku zmodyfikowanego duration

$$\$dur = -D_{mod}P \tag{4.36}$$

Przykład 4.6 Weźmy 10-letnią obligację o stałym oprocentowaniu $c = 7\%$, wypłacająca dwa razy do roku kupon m=2. Stopa zwrotu w terminie do wykupu tej obligacji y = 6%. Policzmy zmodyfikowane duration D_{mod}, wrażliwość $\$dur$ oraz wartość cenową punktu bazowego $DV01$.

Zmodyfikowane duration D_{mod} = 7,244 lat, wrażliwość $\$dur$ = -778,26, a wartość punktu bazowego $DV01$=0,078. □

Zauważmy, że zmodyfikowane duration oraz wrażliwość umożliwiają nam wyznaczenie bezwzględnego zysku i straty Z&S oraz względnego zysku i straty z inwestycji w obligację (portfel obligacji) dla małych zmian stopy zwrotu w terminie do wykupu y

$$\begin{aligned} \text{bezwzględny Z\&S} &\simeq \$dur \cdot \Delta y \\ \text{względny Z\&S} &\simeq -D_{mod} \cdot \Delta y \end{aligned}$$

Duration jest wielkością, która jest powszechnie używana przez inwestorów do zarządzania portfelem obligacji. O tym w jaki sposób można wykorzystać duration do zarządzania portfelem obligacji pokażemy dalej.

[2] W literaturze przedmiotu można spotkać również określenia: wartość punktu bazowego (*basis point value*) BPV lub wartość nominalna 1 punktu bazowego (*dollar value of an 01*) DV01

Duration portfela obligacji
Załóżmy, że mamy n obligacji w portfelu o tej samej stopie zwrotu w terminie do wykupu YTM, przy czym waga każdej z nich wynosi w_i, gdzie $1 \leqslant i \leqslant n$. Wtedy duration portfela obligacji wyraża się zależnością

$$D = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot D_i \tag{4.37}$$

4.5. Immunizacja portfela obligacji

Duration obligacji lub portfela obligacji oznacza neutralny horyzont inwestycyjny, tzn. dla inwestora nie jest ważne czy stopy wzrosną czy spadną w okresie inwestycji. Ryzyko reinwestycji jest kompensowane ryzykiem zysków kapitałowych. W praktyce bardzo często zdarza się, że instytucja finansowa czy też inwestor chce uzyskać na koniec okresu inwestowania określoną wartość portfela. Naturalną strategią byłoby zainwestowanie w obligacje, których zapadalność jest taka sama jak długość okresu inwestowania i dodatkowo wartość takiego portfela obligacji jest taka sama jak wartość dzisiejsza pożądanej wartości końcowej inwestycji. Jednak taka sytuacja nie występuje często w rzeczywistości, bo takie obligacje mogą być niedostępne na rynku.

Można zainwestować w obligacje o krótszym terminie zapadalności niż czas inwestowania, ale ponowna inwestycja w te same obligacje naraża nas na ryzyko reinwestowania.

Można również zainwestować w obligacje o dłuższym terminie zapadalności niż czas inwestowania i sprzedać te obligacje przed terminem wykupu. Wtedy jednak występuje ryzyko zmiany ceny, a ponadto ryzyko reinwestowania odsetek.

W celu osiągnięcia pożądanej wartości portfela, a jednocześnie zabezpieczenia się przed ryzykiem reinwestowania oraz ryzykiem zmiany ceny stosuje się strategię immunizacji portfela. Polega ona na utworzeniu portfela, którego duration równe jest okresowi inwestowania i którego wartość jest równa wartości dzisiejszej oczekiwanej wartości końcowej portfela.

Tą strategię pokażemy na przykładach. Zaczniemy od sytuacji, gdy w portfelu mamy tylko jedną obligację o zadanym duration.

Przykład 4.7 Załóżmy, że chcemy mieć po 4 latach 157,3 tys. zł na kupno mieszkania. Na rynku dostępna jest 5-letnia obligacja o stałym oprocentowaniu w wysokości 12% p.a., przy czym kupony są wypłacane raz do roku, $m = 1$. Nominał tej obligacji wynosi $F = 100$ zł. Kwotowanie obligacji wynosi 93,13 zł, co oznacza, że stopa zwrotu w terminie do wykupu tej obligacji $YTM = 14,0\%$. Co więcej, duration tej obligacji $D = 4$ lata. Do obliczeń, zastosowaliśmy model kapitalizacji dyskretnej. Zatem kupujemy 1000 obligacji, by po 4 latach uzyskać 157,3 tys. zł.

Pokażemy, że bez względu na to jak zmienią się rynkowe stopy procentowe w ciągu 4 lat, to wartość naszej inwestycji będzie na żądanym poziomie. Załóżmy, że stopy zmieniają się

po kilku dniach od naszej inwestycji i pozostają na tym poziomie do końca trwania naszej inwestycji.
Wartość naszej inwestycji po 3,5 roku, 4 latach i po 4,5 roku podajemy w tabeli 4.3 przy różnych stopach zwrotu w terminie do wykupu YTM.

Tabela 4.3. Wartości inwestycji w obligację przy różnych scenariuszach rynkowych stóp procentowych w tys. zł.

	Wartość inwestycji		
stopa YTM	$V_{3,5}$	V_4	$V_{4,5}$
10%	150,18	157,51	165,20
12%	148,68	157,35	166,53
14%	147,32	157,30	167,95
16%	146,10	157,35	169,47
18%	144,99	157,50	171,09

Wartość inwestycji, jaką chcemy uzyskać po 4 latach, jest dobrze zabezpieczona przed zmianą stopy procentowej. Natomiast brak takiego zabezpieczenie występuje dla innych chwil. □

W przykładzie założyliśmy, że stopa spada lub rośnie i pozostaje na tym poziomie przez cały czas.

Rozważmy teraz sytuację, w której zabezpieczamy wysokość naszego zobowiązania portfelem obligacji.

Przykład 4.8 Załóżmy, że przedsiębiorstwo ma do uregulowania zobowiązanie za 10 lat w wysokości 1 mln zł. Kupno 10-letniej obligacji 0-kuponowej rozwiązałoby problem, jednak na rynku nie ma takich obligacji. Dostępne są tylko 3 obligacje, wypłacające kupony 2 razy do roku, $m = 2$, o parametrach podanych w tabeli 4.4.

Tabela 4.4. Parametry obligacji dostępnych na rynku.

obligacja	oprocentowanie	zapadalność	cena	YTM
1	6%	30 lat	69,04	9,0%
2	11%	10 lat	113,01	9,0%
3	9%	20 lat	100,00	9,0%

Warto podkreślić, że wszystkie obligacje mają taką samą stopę zwrotu w terminie do wykupu $YTM = 9\%$. Zatem nie będzie trudności w wyznaczeniu wartości dzisiejszej 1 mln zł za 10 lat. Wartość dzisiejsza 1 mln zł za 10 lat to

$$\frac{1}{(1 + \frac{0,09}{2})^{20}} = 414{,}643 \text{ tys. zł}$$

Dodatkowo, policzmy duration każdej z obligacji. Okazuje się, że $D_1 = 11{,}44$ lat, $D_2 = 6{,}54$ lat, $D_3 = 9{,}61$ lat. Zatem portfel obligacji nie może być utworzony z obligacji drugiej i trzeciej bo ich duration jest krótsze niż 10 lat.

Załóżmy, że konstruujemy portfel składający się z obligacji pierwszej i drugiej. Immunizowany portfel powinien spełniać warunki

$$
\begin{aligned}
w_1 + w_2 &= 1\\
w_1 D_1 + w_2 D_2 &= 10
\end{aligned}
$$

gdzie: w_i waga i-tej obligacji, D_i duration i-tej obligacji, $i = 1, 2$. Pierwszy warunek mówi o tym, że nasze aktywa są lokowane w dwie obligacje, natomiast drugi określa duration portfela.

Rozwiązując ten układ równań uzyskujemy wagi $w_1 = 0{,}706$ oraz $w_2 = 0{,}294$. Zatem w pierwszej obligacji powinniśmy ulokować $w_1 \cdot 414{,}643 = 292{,}789$ tys. zł, a w drugiej $w_2 \cdot 414{,}643 = 121{,}854$ tys. zł.

Zobaczmy teraz jak wygląda wynik naszego zabezpieczenia. Załóżmy, że w krótkim okresie, od chwili skonstruowania portfela (tak, że możemy pominąć upływ czasu) zmieniają się stopy rynkowe odpowiednio na 8% oraz 10%. Zmiany portfela obligacji oraz zobowiązania przedsiębiorstwa przedstawiono w tabeli 4.5.

Tabela 4.5. Wartość portfela obligacji i zobowiązania przedsiębiorstwa w zł.

	8%	9%	10%
obligacja 1			
cena	77,38	69,04	62,14
liczba	4 241	4 241	4 241
wartość	328 157,36	292 798,63	263 526,73
obligacja 2			
cena	120,39	113,01	106,23
liczba	1 078	1 078	1 078
wartość	129 811,79	121 854,23	114 543,62
wartość portfela	457 969,15	414 642,86	378 070,35
wartość zobowiązania	456 386,95	414 642,86	376 889,48
różnica	1 582,21	0,00	1 180,87

Oczywiście należy uwzględnić w obliczeniach zaokrąglenia liczby akcji, ceny i wartości obligacji.

Przykład pokazuje, że jeśli stopy rynkowe (w naszym przykładzie stopy YTM zmienią się) tuż po dokonaniu immunizacji portfela to zmiana ta, nie wpływa na wywiązanie się z zobowiązań przedsiębiorstwa. Jeśli stopa spada, to cena obligacji rośnie, wzrasta zatem wartość portfela, ale z drugiej strony rośnie wartość dzisiejsza 1 mln zł za 10 lat. Gdy stopa rynkowa rośnie, to ma miejsce dokładnie odwrotny proces. □

Immunizacja portfela dostarcza osłony ze względu na zmianę stopy procentowej. Idea osłony jest bardzo prosta i przejrzysta. Jednak w praktyce, ze względu na upływ czasu do zapadalności i zmianę stopy procentowej, musimy dokonywać zmiany składu portfela, czyli musimy immunizować portfel na bieżąco. Ta procedura jest związana z kosztami transakcji. Poza tym na rynku muszą występować obligacje o tej samej stopie zwrotu w terminie do wykupu YTM, co ogranicza możliwość stosowania tej metody.

4.6. Osłona portfela obligacji

Załóżmy, że chcemy osłonić portfel obligacji (*hedge a bond portfolio*) o stopie zwrotu w terminie do wykupu y i cenie P (będziemy oznaczać $P(y)$ aby podkreślić zależność od y). Nasuwa się pomysł aby osłaniać taki portfel aktywem o stopie zwrotu w terminie do wykupu y_1 (*a priori* innej niż y), którego cenę oznaczymy przez $H(y_1)$. Wypadkowy portfel $P^\star$ składający się z osłanianego portfela $P(y)$ oraz instrumentu osłaniającego $H(y_1)$ w liczbie ϕ będzie miał wartość

$$P^\star = P(y) + \phi H(y_1) \tag{4.38}$$

Naszym celem jest uczynienie portfela $P^\star$ niewrażliwym na małe zmiany stopy zwrotu w terminie do wykupu. Zakładając, że krzywa YTM wpływają tylko małe przesunięcia tak, że $dy = dy_1$ dostajemy zależność

$$dP^\star \simeq [P'(y) + \phi H'(y_1)]dy = 0 \tag{4.39}$$

co oznacza, że

$$\phi \$dur_{H(y_1)} = -\$dur_{P(y)} \tag{4.40}$$

lub alternatywnie

$$\phi H(y_1) D_{mod}(H(y_1)) = -P(y) D_{mod}(P(y)) \tag{4.41}$$

i w ostateczności dostajemy zależność na wielkość instrumentu osłaniającego

$$\phi = -\frac{\$dur(P(y))}{\$dur(H(y_1))} = -\frac{P(y) D_{mod}(P(y))}{H(y_1) D_{mod}(H(y_1))} \tag{4.42}$$

Zauważmy, że osłona wymaga zajęcia przeciwstawnej pozycji w osłaniającym instrumencie finansowym.

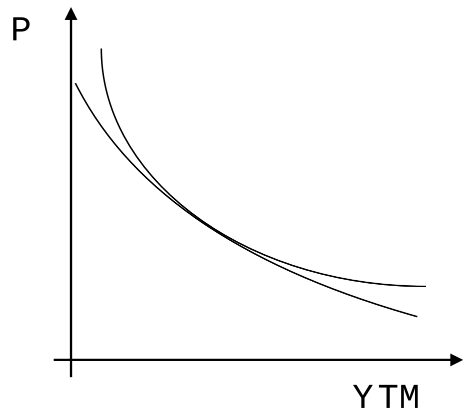
Przykład 4.9 Załóżmy, że inwestor ma portfel obligacji wart 86,7 tys. zł. Stopa zwrotu w terminie do wykupu tego portfela wynosi YTM=6,25% a zmodyfikowane duration tego portfela $D_{mod} = 7{,}82$ lata. Inwestor chciałby osłonić swój portfel. Ma do dyspozycji obligację o cenie $H(y_1)$=1 071 zł, stopie zwrotu w trminie do wykupu YTM_1=5% i zmodyfikowanym duration $D_{mod}(H(y_1)) = 6{,}932$. Czy taką obligacją może osłonić swój portfel i w jaki sposób?

Policzmy współczynnik osłony (*hedge ratio*)

$$\phi = -\frac{86\,700 \cdot 7{,}82}{1\,071 \cdot 6{,}932} = -91{,}316 \tag{4.43}$$

Inwestor powinien sprzedać krótko (bo znak: 'minus') 91,316 obligacji.[3] □

[3] zakładamy, że aktywa są doskonale podzielne



Rysunek 4.3. Wypukłość dwóch obligacji.

4.7. Wypukłość obligacji

Idea zabezpieczania ryzyka stopy procentowej za pomocą duration jest intuicyjnie bardzo prosta. Jednak musimy być świadomi założeń ograniczających możliwość stosowania tej koncepcji:

- Zakładamy, że wartość portfela obligacji (w szczególności jednej obligacji) może być aproksymowane przez pierwszy wyraz rozwinięcia funkcji ceny obligacji w szereg Taylora. Jak pamiętamy, taka aproksymacja pracuje dla małych zmian stopy zwrotu w terminie do wykupu YTM. Czyli zakładamy, że w rzeczywistości mamy małe zmiany YTM, co nie zawsze odpowiada realiom rynkowym.
- Zakładamy, także że na krzywą YTM działają równoległe przesunięcia, tzn. jeśli na początku inwestycji każda obligacja w portfelu o dowolnej zapadalności miała takie samo YTM, to po pewnym czasie - jeśli zmieni się sytuacja na rynku - zakładamy, że każda obligacja poddana zostanie takiej samej zmianie.

Duration w modelu ciągłym (czy zmodyfikowane duration w modelu dyskretnym) mierzy nachylenie krzywej YTM-P w danym punkcie stopy zwrotu w terminie do wykupu YTM. Jak pokazaliśmy wcześniej, prowadzi to do aproksymacji krzywej YTM-P, która służy do mierzenia ryzyka stopy procentowej jak również zarządzania tym ryzykiem. Lepszą aproksymację krzywej możemy uzyskać dodając wyraz drugiego rzędu rozwinięcia funkcji ceny obligacji P w szereg Taylora. Wyraz drugiego rzędu w tym rozwinięciu związany jest z **wypukłością** (*convexity*) obligacji i odpowiada za stopień krzywizny relacji YTM-P. Poza tym pojęcie wypukłości będzie nam przydatne przy omawianiu metod zarządzania portfelem obligacji. Można teraz powiedzieć, że inwestorzy preferują "bardziej" wypukłe obligacje.

Wiemy, że cena obligacji P jest funkcją trzech parametrów $P = P(y, T, c)$. Definiujemy wypukłość $Conv$ w modelu ciągłym następująco

$$Conv = \frac{1}{P}\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{1}{P}\sum_{i=1}^{n} C_i \cdot t_i^2 \cdot e^{-y \cdot t_i} \tag{4.44}$$

gdzie:
C_i - wysokość kuponu w i-tej chwili, $1 \leqslant i \leqslant n$;
t_i - chwile w których są wypłacane kupony, $1 \leqslant i \leqslant n$;
$y = YTM$ - stopa zwrotu w terminie do wykupu obligacji.

Wtedy cenę obligacji możemy aproksymować następująco

$$\Delta P = -D \cdot P \cdot \Delta y + \frac{1}{2} Conv \cdot P \cdot (\Delta y)^2 \tag{4.45}$$

W przypadku modelu dyskretnego definiujemy wypukłość dokładnie tak samo, jednak z oczywistych powodów będziemy mieć inną zależność

$$Conv = \frac{1}{P}\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{1}{P}\frac{1}{m^2}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{i \cdot (i+1) \cdot C/m}{(1+y/m)^{i+2}} + \frac{n \cdot (n+1) \cdot F}{(1+y/m)^{n+2}}\right) \tag{4.46}$$

Przypuśćmy, że mamy obligację z ceną P i odpowiadającej jej stopie zwrotu w terminie do wykupu y, zatem możemy wyznaczyć zmodyfikowane duration D_M oraz wypukłość $Conv$ obligacji. Wtedy dla małych zmian stopy zwrotu w terminie do wykupu Δy odpowiadająca zmiana ceny obligacji będzie dana następująco

$$\Delta P = -D_M P \Delta y + \frac{1}{2} Conv P (\Delta y)^2 \tag{4.47}$$

Zauważmy, że jednostkami wypukłości obligacji $Conv$ jest czas do kwadratu. Wypukłość jest średnią ważoną iloczynu chwil czasowych (danej i poprzedniej) $t_i t_{i+1}$, gdzie podobnie jak w przypadku duration, wagi są proporcjonalne do wartości dzisiejszej odpowiednich przepływów gotówkowych. Wynik jest modyfikowany przez czynnik $1/(1+y/m)^2$. Przykładowe wyznaczanie wypukłości obligacji można znaleźć w run:plik8.xlsarkuszu.

Własności wypukłości

1. dodatnia wypukłość (*positive convexity*)

$$YTM \nearrow \Longrightarrow P \searrow \Longrightarrow D \searrow \Longrightarrow Conv \searrow$$

$$YTM \searrow \Longrightarrow P \nearrow \Longrightarrow D \nearrow \Longrightarrow Conv \nearrow$$

Ta własność powoduje, że w odpowiedzi na zmiany stopy zwrotu w terminie do wykupu YTM, zmienia się cena obligacji i w konsekwencji duration obligacji.

Wzrost stopy YTM powoduje spadek ceny P, zmniejszenie duration tej obligacji, a to z kolei wyhamowuje spadek cen. Natomiast, kiedy YTM spada, cena obligacji P rośnie, duration rośnie tak, że przyspiesza procentową zmianę ceny. Kąt nachylenia stycznej maleje wraz ze wzrostem oczekiwanej stopy zwrotu w terminie do wykupu YTM. Bardziej płaska styczna oznacza zatem krótsze duration, i odwrotnie.

2. przy danej stopie zwrotu w terminie do wykupu YTM i okresie do wykupu T, im niższe oprocentowanie obligacji, tym większa wypukłość obligacji $Conv$,
3. przy danej stopie zwrotu w terminie do wykupu YTM i oprocentowaniu c, im dłuższa zapadalność obligacji T, tym większa wypukłość obligacji $Conv$.

Pokażmy powyższe własności na przykładzie.

Przykład 4.10 Rozważmy model kapitalizacji dyskretnej. Załóżmy, że mamy obligację o stopie kuponowej $c = 7\%$ p.a., o wartości nominalnej F=100 zł, zapadającą za 9 lat. Załóżmy, że kupony są wypłacane raz do roku, m=1. Jej cena czysta na rynku wynosi P=100 zł, zatem stopa zwrotu w terminie do wykupu $YTM = 7\%$ p.a. Duration takiej obligacji wynosi 6,97 lata, a wypukłość 55,43. Rozważmy teraz sytuacje przedstawione powyżej.

Przy ustalonej zapadalności obligacji zmieniamy stopę zwrotu w terminie do wykupu YTM. W konsekwencji zmianie ulega cena obligacji, duration oraz wypukłość obligacji.

Tabela 4.6. Wartość YTM, duartion oraz wypukłości obligacji.

YTM(%)	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
duration (lata)	7,19	7,12	7,04	6,97	6,90	6,82	6,74
wypukłość	61,11	59,17	57,27	55,43	53,63	51,89	50,18

Tabela 4.7. Wpływ zmiany oprocentowania obligacji na wypukłość obligacji przy danym YTM oraz T obligacji.

oprocentowanie (%)	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
wypukłość	62,15	59,57	57,36	55,43	53,74	52,24	50,91

Tabela 4.8. Wpływ zmiany zapadalności obligacji na wypukłość obligacji przy danym oprocentowaniu c oraz stopie zwrotu w terminie do wykupu YTM obligacji.

zapadalność (lata)	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0	12,0
wypukłość	29,43	37,58	46,28	55,43	64,93	74,70	84,66

□

Tabela 4.9. Wpływ zmiany stopy zwrotu w terminie do wykupu na wypukłość obligacji przy danym oprocentowaniu c oraz zapadalności T obligacji.

YTM (%)	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0
wypukłość	62,15	59,57	57,36	55,43	53,74	52,24	50,91

Praktycy rynku instrumentów dłużnych stosują również często pojęcie **nominalnej wypukłości** (*dollar convexity*, *\$convexity*) $\$Conv$:

$$\$Conv = \frac{d^2P}{dy^2} = \frac{1}{m^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{i\cdot(i+1)\cdot C/m}{(1+y/m)^{i+2}} + \frac{n\cdot(n+1)\cdot F}{(1+y/m)^{n+2}}\right) \tag{4.48}$$

Wypukłość portfela obligacji
Wypukłość portfela n obligacji, składającego się z obligacji o wagach w_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, przy założeniu, że YTM obligacji w portfelu jest takie samo, wynosi

$$Conv_p = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot Conv_i \tag{4.49}$$

gdzie: $Conv_i$ oznacza wypukłość i-tej obligacji w portfelu, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Gdy obligacje w portfelu mają różne stopy zwrotu w terminie do wykupu YTM (czyli krzywa YTM nie jest płaska), to zależność (4.49) jest tylko wartością przybliżoną. Pokażemy to na przykładzie.

Przykład 4.11 Rozważmy model kapitalizacji dyskretnej. Załóżmy, że mamy trzy obligacje, wypłacające raz do roku kupony m=1, o następujących parametrach

Tabela 4.10. Parametry obligacji.

obligacja	oprocentowanie (%)	zapadalność (lata)	cena (zł)
1	5%	2 lata	100,00
2	5%	7 lat	91,77
3	5%	15 lat	77,93

Możemy teraz policzyć każdej z nich stopę zwrotu w terminie do wykupu YTM, duration D, zmodyfikowane duration MD oraz wypukłość.

Tabela 4.11. YTM, duration, zmodyfikowane duration, wypukłość obligacji.

obligacja	YTM (%)	duration (lata)	zmodyfikowane duration (lata)	wypukłość
1	5,0 %	1,952 roku	1,859 roku	5,269
2	6,5 %	6,029 lat	5,661 lat	40,354
3	7,5 %	10,286 lat	9,568 lat	123,808

Tworzymy teraz portfel tych obligacji, kupując po jednej obligacji do portfela. Obliczamy teraz średnią ważoną duration portfela, zmodyfikowanego duration portfela o wypukłość portfela, nie zakładając, że YTM każdej z obligacji jest takie samo. Następnie wyznaczamy stopę zwrotu w terminie do wykupu portfela i dla tak wyznaczonego YTM portfela obliczamy nowe ceny obligacji, nowe wagi obligacji w portfelu, duration portfela, zmodyfikowane duration portfela oraz wypukłość portfela. Różnica pomiędzy wartościami przybliżonymi a rzeczywistymi jest podana w tabeli.

Tabela 4.12. YTM, duration, zmodyfikowane duration, wypukłość portfela obligacji, przy założeniu różnych YTM obligacji obliczonych w sposób przybliżony oraz dokładny.

	duration (lata)	zmodyfikowane duration (lata)	wypukłość
aproksymacja	5,747	5,380 roku	51,460
wartość dokładna	5,925	5,545 roku	54,596
różnica	-0,178	-0,165	-3,137
różnica względna	-3,00%	-2,98%	-5,75%

□

4.8. Duration Fishera-Weila

Koncepcja duration zaprezentowana we wcześniejszym rodziale może być rozszerzona na strukturę czasową stopy procentowej. Jak pamiętamy, duration jest miarą wrażliwości stopy procentowej. W przypadku duration Macaulaya była to wrażliwość ze względu na stopę zwrotu w terminie do wykupu YTM.

Obecnie zajmiemy się sytuacją, gdy mamy strukturę terminową stopy procentowej i zbadamy jak zachowuje się pod wpływem przesunięcia równoległego krzywej spot.

Załóżmy, że mamy stopy spot: $r(1), r(2), \ldots, r(n)$. Dla uproszczenia zapisu, oznaczmy $r(i) = r_i$. Weźmy przesunięcie równoległe krzywej spot o wielkość λ (λ może być dodatnie zatem mamy przesunięcie krzywej w górę, albo ujemne czyli przesunięcie krzywej w dół) czyli przesunięcie równoległe $r_1 + \lambda, r_2 + \lambda, \ldots, r_n + \lambda$. Będziemy chcieli zbadać wrażliwość ceny obligacji w takiej sytuacji.

4.8.1. Duration Fishera-Weila dla modelu kapitalizacji ciągłej

Weźmy model kapitalizacji ciągłej. Wtedy stopy spot wyznaczają cenę papieru dłużnego

$$P = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot e^{-r_{t_i} \cdot t_i} \tag{4.50}$$

Możemy teraz zdefiniować duration Fishera-Weila następująco:

$$D_{FW} = \frac{1}{P} \sum_{i=0}^{n} \cdot t_i \cdot C_i e^{-r_{t_i} \cdot t_i} \tag{4.51}$$

Postawiona definicja, wprowadzona w 1977 roku, jest analogiczna do definicji Macaulaya, ale nie jest oparta na stopie zwrotu w terminie do wykupu YTM, ale stopach spot r_{t_i}. Jednostką duration Fishera-Weila jest czas. Poza tym spełniony jest warunek: $t_0 \leqslant D_{FW} \leqslant t_n$.

Rozważymy teraz wrażliwość ceny obligacji na równoległe przesunięcie krzywej spot o wielkość λ i pokażemy, że jest ona determinowana przez duration Fishera-Weila D_{FW}. Dla dowolnej liczby λ cena obligacji wynosi

$$P(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} C_i \cdot e^{-(r_{t_i}+\lambda)\cdot t_i} \tag{4.52}$$

Zatem pochodna ceny $P(\lambda)$ względem λ w punkcie 0 będzie dana

$$\left.\frac{dP(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} = \frac{dP(0)}{d\lambda} = -\sum_{i=1}^{n} t_i \cdot C_i \cdot e^{-r_{t_i}\cdot t_i} \tag{4.53}$$

stąd **względna wrażliwość ceny**

$$\frac{1}{P(0)}\frac{dP(0)}{d\lambda} = -D_{FW} \tag{4.54}$$

Zanotujmy tę obserwację.

Twierdzenie 4.1 *Jeśli cała krzywa spot przesunie się o* $r_{t_i}+\lambda$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ *to cena obligacji* $P(\lambda)$ *spełni zależność*

$$\frac{1}{P(0)}\frac{dP(0)}{d\lambda} = -D_{FW} \tag{4.55}$$

4.8.2. Duration Fishera-Weila dla modelu kapitalizacji dyskretnej

Przeanalizujmy teraz model dyskretny, w którym mamy wypłacane kupony m razy w roku. Wtedy cena obligacji wynosi

$$P(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \frac{C_k}{m}\left(1 + \frac{r_k+\lambda}{m}\right)^{-k} \tag{4.56}$$

Obliczając pochodną ceny $P(\lambda)$ względem λ dla $\lambda = 0$ uzyskamy

$$\frac{dP(0)}{d\lambda} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{m}\frac{C_k}{m}\left(1 + \frac{r_k}{m}\right)^{-(k+1)} \tag{4.57}$$

Gdy podzielimy zależność (4.57) przez $-P(0)$ to otrzymamy

$$D_Q = -\frac{1}{P(0)}\frac{dP(0)}{d\lambda} = \frac{1}{P(0)}\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{m}\frac{C_k}{m}\left(1 + \frac{r_k}{m}\right)^{-(k+1)} \tag{4.58}$$

Wyrażenie (4.58) to quasi-zmodyfikowane duration (*quasi-modified duration*). Jednostką tutaj jest czas, jednak nie jest to dokładnie średni czas przepływów gotówki ponieważ w wyrażeniu pojawia się wyraz $(1 + r_k/m)^{-(k+1)}$ zamiast czynnika dyskontowego $(1 + r_k/m)^{-k}$. Stąd nazwa quasi-modified duration.

Twierdzenie 4.2 *Jeśli cała krzywa spot przesunie się o $r_{t_i} + \lambda$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ to cena $P(\lambda)$ spełnia zależność*

$$\frac{1}{P(0)} \frac{dP(0)}{d\lambda} = -D_Q \tag{4.59}$$

4.9. Immunizacja portfela obligacji ze względu na równoległe przesunięcie krzywej dochodowości

Struktura terminowa stopy procentowej prowadzi do nowej (bardziej odpornej) metody immunizacji portfela papierów dłużnych. W przeciwieństwie do immunizacji portfela przedstawionej powyżej, nie zależy od wyboru obligacji z tymi samymi stopami zwrotu w terminie do wykupu YTM. Co więcej, z racji konstrukcji struktury terminowej stopy procentowej YTM nie ma nawet w zależnościach na wycenę papieru dłużnego. Będziemy teraz chcieli pokazać jak uodpornić portfel obligacji ze względu na ryzyko równoległego przesunięcia krzywej dochodowości. Wykorzystamy tutaj pojęcie duration Fishera-Weila wprowadzone wcześniej. Przeanalizujmy metodę postępowania na przykładzie.

Przykład 4.12 Przedsiębiorstwo ma zobowiązanie w wysokości 1 mln złotych płatne za 5 lat. Chce już dzisiaj zabezpieczyć swoje zobowiązanie. Załóżmy, że na rynku mamy stopy spot takie, jak podane w tabeli 4.13.

Tabela 4.13. Stopy spot.

lata	stopa spot
1	7,67%
2	8,27%
3	8,81%
4	9,31%
5	9,75%
6	10,16%
7	10,52%
8	10,82%
9	11,15%
10	11,42%
11	11,67%
12	11,89%

Na rynku mamy dwie obligacje o następujących parametrach. Pierwsza obligacja ma zapadalność za 12 lat, oprocentowana jest na poziomie 6% p.a. wartość nominalna wynosi 100 zł, a jej cena wynosi 65,95 zł. Druga obligacja jest obligacją 5-letnią, jej oprocentowanie wynosi 10% p.a., nominał 100 zł, a cena wynosi 101,65 zł. Obliczmy quasi-zmodyfikowane duration dla każdej z nich. Dla pierwszej obligacji $D_1 = 7{,}07$, natomiast dla drugiej $D_2 = 3{,}80$.

Wartość dzisiejsza 1 mln zł za 5 lat wynosi

$$\frac{1 \text{ mln}}{(1 + 0{,}0975)^5} = 627{,}903 \text{ tys. zł}$$

natomiast quasi-zmodyfikowane duration zobowiązania przedsiębiorstwa

$$\frac{5}{1 + r_5} = 4{,}56$$

Możemy teraz sformułować warunek na odporny portfel

$$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= 1 \\ w_1 D_1 + w_2 D_2 &= 4{,}56 \end{aligned}$$

gdzie: w_i waga i-tej obligacji, D_i quasi-zmodyfikowane duration i-tej obligacji, dla $i = 1, 2$.

Rozwiązując ten układ równań otrzymujemy wartość wag: $w_1 = 0{,}23$, $w_2 = 0{,}77$. A stąd liczba obligacji w portfelu wynosi odpowiednio $x_1 = 2207{,}62$, $x_2 = 4744{,}60$.

Zobaczmy teraz jak wygląda wynik naszego zabezpieczenia. Załóżmy, że w krótkim okresie, od chwili skonstruowania portfela (tak, że możemy pominąć upływ czasu) następuje równoległe przesunięcie krzywej dochodowości odpowiednio o 100 pb w dół oraz 100 pb w górę. Zmiany portfela obligacji oraz zobowiązania przedsiębiorstwa przedstawiono w tabeli 4.14.

Tabela 4.14. Wartość portfela obligacji i zobowiązania przedsiębiorstwa w zł.

	-100pb	0pb	+100pb
obligacja 1			
cena	70,85	65,95	61,51
liczba	2 208	2 208	2 208
wartość	156 438,87	145 619,10	135 821,19
obligacja 2			
cena	105,62	101,65	97,89
liczba	4 745	4 745	4 745
wartość	501 146,74	482 349,14	464 489,37
wartość portfela	657 585,62	627 968,24	600 310,56
wartość zobowiązania	657 306,33	627 902,60	600 063,23
różnica	279,29	65,64	247,33

Widzimy, że tak skonstruowane zabezpieczenie przyszłej płatności jest odporne ze względu na równoległe przesunięcia całej krzywej dochodowości. $\square$