Analiza I, egzaminy 2019/20

Termin 1

1. Korzystając z definicji całki Riemanna oblicz granicę ciągu $a_n = \frac{\sqrt[n]{e^1}+\sqrt[n]{e^2}+\sqrt[n]{e^3}+\cdots+\sqrt[n]{e^n}}{n}$.

2. Niech $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$. Pokaż, że równanie $\frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \frac{1}{x-a_3} + \ldots + \frac{1}{x-a_n} = 0$ ma dokładnie $n-1$ rozwiązań.

Wsk. Skorzystaj m. in. z twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośrednich.

3. a) Oblicz granicę prawostroną w 0 funkcji $f(x) = (\frac{\sin x}{x})^{\frac{1}{x}}$.

b) Oblicz granicę w $+\infty$ funkcji $g(x) = \frac{2^{\ln x}}{x}$.

4. Oblicz całkę $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$.

5. Oblicz pole powierzchni bryły powstałej z obrotu dookoła osi OX krzywej $y = e^{-x}$, $x \in [0,1]$.

6. a) Podaj definicję zbioru zwartego w przestrzeni metrycznej.

b) Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia będącego warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby zbiór zawarty w $\mathbb{R}^n$ był zbiorem zwartym.

c) Podaj wypowiedź twierdzenia o obrazie zbioru zwartego poprzez odwzorowanie ciągłe.

d) Udowodnij twierdzenie z podpunktu c).

Termin 2

1. a) Pokaż, że dla każdego $x > 0$ zachodzi nierówność $\ln(1+x) < x$.

b) Pokaż, że ciąg o wyrazie $a_n = (1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{9})(1+\frac{1}{27}) \cdot \ldots \cdot (1+\frac{1}{3^n})$ jest zbieżny.

Wsk. do b). Skorzystaj z a).

2. Niech $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$. Pokaż, że równanie $\frac{1}{x-a_1} + \frac{1}{x-a_2} + \frac{1}{x-a_3} + \ldots + \frac{1}{x-a_n} = 0$ ma dokładnie $n-1$ rozwiązań.

Wsk. Skorzystaj m. in. z twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośrednich.

3. Wyznacz wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = x\ln(\frac{2x}{x-2})$.

4. Wyznacz funkcję $\phi(x) = \int\limits_{[0,x]} f(t)dt$, jeśli $f(x) = \begin{cases} \text{arcsin}x, & 0 \leqslant x < 1 \\ \frac{2\text{arctg}x}{x^2}, & x \geqslant 1. \end{cases}$

Czy funkcja ϕ jest funkcją pierwotną funkcji f na $[0,+\infty)$? Odpowiedź uzasadnij.

5. Oblicz objętość bryły powstałej z obrotu dookoła osi OX krzywej $y = \frac{1}{1+x^2}$.

6. a) Podaj definicję funkcji rosnącej w przedziale (a,b).

b) Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia będącego warunkiem wystarczającym na to, aby funkcja różniczkowalna była rosnąca w przedziale (a,b).

c) Udowodnij twierdzenie z podpunktu b). Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia, z którego korzystasz w tym dowodzie.

Termin 3

1. a) Pokaż, że dla każdego $x > 0$ zachodzi nierówność $\ln(1+x) < x$.

b) Udowodnij metodą indukcji matematycznej, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$.

c) Pokaż, że ciąg o wyrazie $a_n = (1+\frac{1}{1\cdot 2})(1+\frac{1}{2\cdot 3})(1+\frac{1}{3\cdot 4}) \cdot \ldots \cdot (1+\frac{1}{n\cdot(n+1)})$ jest zbieżny.

2. Znajdź wymiary walca o największej objętości wpisanego w kulę o promieniu R.

3. Oszacuj dokładność wzoru przybliżonego $\sqrt{1+x} \cong 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ dla $|x| \leqslant 0,1$.

Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia, z którego skorzystałeś.

4. Zbadaj zbieżność całki $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^3+1}$.

5. Narysuj krzywą $(x^2+y^2)^3 = 4x^2y^2$ i oblicz pole obszaru ograniczonego tą krzywą.

6. a) Podaj definicję funkcji malejącej w przedziale (a,b).

b) Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia będącego warunkiem wystarczającym na to, aby funkcja różniczkowalna była malejąca w przedziale (a,b).

c) Udowodnij twierdzenie z podpunktu b). Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia, z którego korzystasz w tym dowodzie.