Analiza I, egzaminy 2020/21

Termin 1

1. Wyznacz kres górny (supremum) i kres dolny (infimum) zbioru wartości funkcji $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ osiąganych na $(0, +\infty)$.

2. Korzystając z definicji całki Riemanna oblicz granicę ciągu $a_n = \frac{\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{3\pi}{n} + ... + \sin\frac{n\pi}{n}}{n}$.

3. Zbadaj zbieżność całki $\int\limits_{-1}^{1} \frac{x}{1-x^4} dx$.

4. Oblicz pole powierzchni bryły powstałej z obrotu dookoła osi OX jednego łuku cykloidy $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

5. a) Niech (X, d) będzie przestrzenią metryczną a zbiór A podzbiorem X. Podaj definicje: wnętrza zbioru A, domknięcia zbioru A, brzegu zbioru A i punktu skupienia zbioru A.

b) Rozważmy zbiory $A = (0, 1) \cup (1, 2]$ oraz $B = (0, 1) \cap \mathbb{Q}$ (w przestrzeni $\mathbb{R}$ ze zwykłą metryką indukowaną przez wartość bezwzględną $|\cdot|$). Wyznacz: wnętrze, domknięcie, brzeg i zbiór wszystkich punktów skupienia zbiorów A i B. (Każdą z odpowiedzi krótko uzasadnij.)

Termin 2

1. Pokaż, że dla każdego $x > 0$ zachodzi $\sqrt{1 + 2x} > 1 + x - \frac{x^2}{2}$.

2. a) Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia Taylora.

b) Oszacuj dokładność wzoru przybliżonego $\cos^2 x \cong 1 - x^2$ dla $|x| \leqslant \frac{1}{10}$.

3. Wyznacz funkcję $\phi(x) = \int\limits_{[-1,x]} f(t)dt$, jeśli $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1-2x-x^2}}, & -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \sqrt{1+x^2}, & x > 0. \end{cases}$

Czy funkcja ϕ jest funkcją pierwotną funkcji f na $[-1, +\infty)$? Odpowiedź uzasadnij.

4. Oblicz pole obszaru ograniczonego asteroidą $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

5. a) Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia Fermata będącego warunkiem koniecznym istnienia ekstremum lokalnego funkcji w punkcie.

b) Udowodnij powyższe twierdzenie. Podaj dokładne wypowiedzi dwóch twierdzeń, z których skorzystałeś w dowodzie.

Termin 3

1. Zbadaj przebieg zmienności funkcji $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

2. Wyznacz wymiary puszki w kształcie walca o stałej objętości V, której powierzchnia całkowita jest najmniejsza.

3. a) Pokaż, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $e^{x^2} \geqslant 1 + x^2$.

b) Zbadaj zbieżność całki $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

4. Narysuj krzywą $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$ i oblicz pole obszaru ograniczonego tą krzywą.

5. a) Podaj definicję ciągu Cauchy'ego, przestrzeni zupełnej i przestrzeni Banacha.

b) Czy $X = (0, 1)$ z metryką indukowaną przez wartość bezwzględną $|\cdot|$ jest przestrzenią zupełną? Odpowiedź uzasadnij.