Podręczniki:
M. Gewert, Z. Skoczylas,
„Analiza Matematyczna 1, Definicje, twierdzenia, wzory”
„Analiza Matematyczna 1, Przykłady i zadania”
W. Żakowski „Matematyka”, tom 1, EIT Politechnika Warszawska
G.M. Fichtenholz, „Rachunek różniczkowy i całkowy”, t. I, II, III
Zbiory zadań:
J. Banaś, S. Wędrychowicz, „Zbiór zadań z analizy matematycznej”
W. Stankiewicz „Analiza matematyczna dla wyższych uczelni technicznych”, t. IB
W. Krysicki, L. Włodarski, „Analiza matematyczna w zadaniach” t. I i II

LOGIKA

		zaprzeczenie	alternatywa	koniunkcja	implikacja	równoważność
p	q	$\sim p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1

TW.
Zał: ...
Teza: ...

co oznacza: Zał $\Rightarrow$ Teza

TW.
Zał. ogólne: p
Teza: $q \Rightarrow r$

Mówimy wtedy, że q jest **warunkiem wystarczającym** (w skrócie **WW**) na r.
Ale można też wtedy powiedziedzieć, że r jest **warunkiem koniecznym** (w skrócie **WK**) na q.

PRZ.

TW.
Zał.: $W(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ jest wielomianem o współczynnikach całkowitych
p i q są liczbami całkowitymi
Teza: jeśli $\frac{p}{q}$ jest pierwiastkiem $W(x)$, to p jest dzielnikiem a_0 i q jest dzielnikiem a_n

TW.
Zał. ogólne: p
Teza: $q \Leftrightarrow r$

Mówimy wtedy, że q jest **warunkiem koniecznym i wystarczającym** (w skrócie **WKW**) na r.

PRZ.

TW.

Zał.: $W(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$ jest wielomianem, a jest liczbą rzeczywistą
Teza: a jest pierwiastkiem $W(x)$ wtedy i tylko wtedy, gdy wielowian $W(x)$ jest podzielny przez $x - a$

Przykłady ważnych **tautologii** (tzn. takich zdań złożonych dla których niezależnie od prawdziwości czy fałszywości zdań składowych całe zdanie złożone jest zawsze prawdziwe).

Prawo transpozycji: $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$
Zaprzeczenie implikacji: $\sim (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim (p \Rightarrow q)$	$p \wedge \sim q$
0	0	1	1	1	1	0	0
1	0	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0	0	0

Dowód nie wprost opiera się na prawie transpozycji tzn. zaprzeczamy tezie twierdzenia i dochodzimy do sprzeczności z założeniami.

Aby pokazać, że hipoteza ("twierdzenie") nie jest prawdziwa korzystamy prawa zaprzeczenia implikacji i konstruujemy tzw. kontrprzykład czyli taki obiekt, który spełnia założenia i nie spełnia tezy tej hipotezy.

Prawa de Morgana:
$\sim (p \vee q) \Leftrightarrow (\sim p) \wedge (\sim q)$
$\sim (p \wedge q) \Leftrightarrow (\sim p) \vee (\sim q)$

KWANTYFIKATORY

- ogólny, duży $\forall x\ \phi(x)$ ($\underbrace{\text{dla każdego}}_{\text{for All}}$ x zachodzi $\phi(x)$)

- szczegółowy, mały $\exists x\ \phi(x)$ ($\underbrace{\text{istnieje}}_{\text{there Exists}}$ x dla którego zachodzi $\phi(x)$)

Np. $\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant x$
Nie wolno zmieniać dowolnie kolejności różnego rodzaju kwantyfikatorów.
Np. $\exists n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad n \geqslant x$

Prawo de Morgana dla kwantyfikatorów
$\sim (\forall x\ \phi(x)) \Leftrightarrow \exists x\ \sim \phi(x)$
$\sim (\exists x\ \phi(x)) \Leftrightarrow \forall x\ \sim \phi(x)$
Np.
$\sim (\exists n \in \mathbb{N}\ \forall x \in \mathbb{R}\ n \geqslant x) \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \exists x \in \mathbb{R}\ n < x$

TEORIA MNOGOŚCI
$\varnothing$ - zbiór pusty
suma zbiorów $A \cup B \stackrel{df}{=} \{x : x \in A \ \vee \ x \in B\}$
przecięcie (wspólna część) zbiorów $A \cap B \stackrel{df}{=} \{x : x \in A \ \wedge \ x \in B\}$
różnica zbiorów $A \setminus B \stackrel{df}{=} \{x : x \in A \ \wedge \ x \notin B\}$
iloczyn kartezjański zbiorów $A \times B = \{(a,b) : a \in A \ \wedge \ b \in B\}$

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : \ \forall i \in \{1, \ldots, n\} \ a_i \in A_i\}$
$A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ razy}}$
Oznaczenia zbiorów liczbowych
$\mathbb{N}$ - zbiór liczb naturalnych
$\mathbb{Z}$ - zbiór liczb całkowitych
$\mathbb{Q}$ - zbiór liczb wymiernych
$\mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych
$\mathbb{C}$ - zbiór liczb zespolonych

FUNKCJE

DEF. $X \neq \varnothing, Y \neq \varnothing$
Jeśli każdemu $x \in X$ przyporządkowana jest dokładnie jedna wartość $y \in Y$ to takie przyporządkowanie nazywamy funkcją.
$f : \ X \ni x \longrightarrow y = f(x) \in Y$
$f : \ X \to Y$
f jest funkcją $\Leftrightarrow \ \forall x \in X \ \ \exists! y \in Y \ \ y = f(x)$

X - zbiór argumentów, dziedzina funkcji, często oznaczany przez D lub D_f
Y - zbiór wartości, zbiór docelowy
$y = f(x)$ - wzór funkcji, równanie wykresu
x - zmienna niezależna
y - zmienna zależna
$\{(x, y) : \ x \in X \ y = f(x)\}$ - wykres funkcji f ($\subset X \times Y$)
Dziedzina naturalna - zbiór tych argumentów, dla których da się obliczyć wartość funkcji f.
Przeciwdziedzina funkcji
$\text{Ɑ}_f = \{f(x) : \ x \in D_f\}$

DEF. $f : \ X \to Y$
f nazywamy różnowartościową (injekcją) na $X \overset{\text{df}}{\Leftrightarrow}$
$\forall x_1, x_2 \in X \quad (x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2))$
$(\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in X \quad (f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2))$

DEF. $f : \ X \to Y$ nazywamy surjekcją (funkcją „na”)$\overset{\text{df}}{\Leftrightarrow} Y = \text{Ɑ}_f$
$\Leftrightarrow \forall y \in Y \ \ \exists x \in X \ \ y = f(x)$

PRZ. $f(x) = \sin x$

DEF. $f : \ X \to Y$ nazywamy bijekcją $\Leftrightarrow f$ jest injekcją i surjekcją.

DEF. $f : \ X \to \mathbb{R}$ nazywamy ograniczoną z góry na zbiorze $A \subset X \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} \ \forall x \in A \ \ f(x) \leqslant M$
$f : \ X \to \mathbb{R}$ nazywamy ograniczoną z dołu na zbiorze $A \subset X \Leftrightarrow \exists M \in \mathbb{R} \ \forall x \in A \ \ f(x) \geqslant M$
f nazywamy ograniczoną na $A \overset{\text{df}}{\Leftrightarrow}$ gdy f jest ograniczona z góry i z dołu na A

Monotoniczność funkcji ($X \subseteq \mathbb{R}$)!
$f : \ X \to \mathbb{R}$

DEF. f jest $\underset{\text{(malejąca)}}{\text{rosnąca}}$ w $A \subset X \overset{\text{df}}{\Leftrightarrow} \forall x_1, x_2 \in A (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \underset{(>)}{<} f(x_2))$

DEF. f jest $\underset{\text{(nierosnąca)}}{\text{niemalejąca}}$ w $A \subset X \overset{\text{df}}{\Leftrightarrow} \forall x_1, x_2 \in A (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \underset{(\geqslant)}{\leqslant} f(x_2))$

DEF. $f: X \to Y, \quad g: Y \to Z$

Złożeniem funkcji g i f nazywamy funkcję $g \circ f: X \to Z$ taką, że

$\forall x \in X \quad (g \circ f)(x) \overset{df}{=} g(f(x))$

f - funkcja wewnętrzna

g - funkcja zewnętrzna

PRZ. $f(x) = x^2$, $g(x) = \cos x$

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \cos(x^2)$

Uwaga. Składanie funkcji nie jest przemienne!

DEF. $f: X \to Y$ - bijekcja

Funkcją odwrotną do funkcji f nazywamy funkcję $f^{-1}: Y \to X$ taką, że:

$\forall y \in Y \;\; f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow y = f(x)$

PRZ. Wyznacz funkcję odwrotną do $f(x) = x^3$.

Uwaga. Wykresy funkcji i funkcji do niej odwrotnej są symetryczne względem prostej $y = x$.

Podstawowe funkcje elementarne:

1. Wielomiany $\quad W(x) = a_n x^n + \ldots + a_0, \;\; a_n \neq 0, \;\; D = \mathbb{R}, \;\; n$ - stopień wielomianu

2. Wymierne $\quad f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}, \;\; P(x), Q(x)$ - wielomiany, $D = \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R}: \; Q(x) = 0\}$

   Szczególny przypadek. $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ - funkcja homograficzna, $ad - bc \neq 0$

3. Potęgowe $\quad f(x) = x^r, \;\; r \in \mathbb{R}$

   dziedzina funkcji zależy od r

   $f(x) = \sqrt{x}, \quad D = [0, +\infty)$

   $f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad D = \mathbb{R}$

   $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}, \quad m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$

   $x^{-r} = \frac{1}{x^r}$

4. Wykładnicze $\quad f(x) = a^x, \;\; a > 0, \;\; a \neq 1$

   $f: \mathbb{R} \to (0, +\infty)$

   $a > 1 \quad f(x) = a^x$ rosnąca

   $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$

   $0 < a < 1 \quad f(x) = a^x$ malejąca

   $a^{x_1} < a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$

   dla $a > 0$, $a \neq 1 \quad f(x) = a^x$ różnowartościowa

   $a^{x_1} = a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$

5. Logarytmiczne $f(x) = \log_a x,\ \ a > 0,\ \ a \neq 1$
   $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$, (zał.: $a > 0,\ a \neq 1,\ b > 0$)
   $f:\ (0, +\infty) \to \mathbb{R}$
   $a > 1 \quad f(x) = \log_a x$ rosnąca
   $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$

   $0 < a < 1 \quad f(x) = \log_a x$ malejąca
   $\log_a x_1 < \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$

   dla $a > 0$, $a \neq 1 \quad f(x) = \log_a x$ różnowartościowa
   $\log_a x_1 = \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$

   Przy odpowiednich założeniach zachodzą:

   (a) $\log_a b + \log_a c = \log_a (b \cdot c)$
   $\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$
   (b) $\log_a b^k = k \log_a b$
   (c) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

   logarytm naturalny
   $\ln x = \log_e x$
   $e = 2,71\ldots$ - stała Eulera
   $a = e^{\ln a}$ dla $a > 0$
   $a^x = e^{\ln a \cdot x}$

6. Trygonometryczne

7. Cyklometryczne (odwrotne do trygonometrycznych)
   $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$
   $\arcsin :\ [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
   $y = \arcsin x,\ x \in [-1, 1] \Leftrightarrow \sin y = x\ \wedge\ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

   PRZ.
   $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$ bo $\sin \frac{\pi}{2} = 1$
   $\arcsin 2$ - nie istnieje
   $\arcsin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$ bo $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

   arccos :
   $\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$
   $\arccos :\ [-1, 1] \to [0, \pi]$
   $y = \arccos x,\ x \in [-1, 1] \Leftrightarrow x = \cos y \wedge y \in [0, \pi]$

   arctg:
   $\operatorname{tg} : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$
   $\operatorname{arctg} : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
   $y = \operatorname{arctg} x,\ x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} y \wedge y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
   Analogicznie definiujemy arcctg

   Podstawowe tożsamości:

1) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1,1]$

2) $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

3) $\sin(\arcsin x) = x \quad \forall x \in [-1,1]$
$\arcsin(\sin x) = x \quad \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

8. Złożenie, suma, różnica, iloczyn, iloraz dowolnej (skończonej) liczby funkcji elementarnych jest funkcją elementarną.

   PRZ. Czy $f(x) = x^x$ jest funkcją elementarną?

   $f(x)^{g(x)} = e^{g(x)\ln(f(x))}, \quad f(x) > 0$

CIĄGI LICZBOWE

DEF. $a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ - funkcja określona na zbiorze liczb naturalnych
$a: \mathbb{N} \ni n \longrightarrow a(n) \in \mathbb{R}$
$a(n) =: a_n$
Ozn. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - ciąg

DEF. Ciąg (a_n) jest rosnący $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ a_{n+1} > a_n$
Ciąg (a_n) jest niemalejący $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ a_{n+1} \geqslant a_n$
Ciąg (a_n) jest malejący $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ a_{n+1} < a_n$
Ciąg (a_n) jest nierosnący $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ a_{n+1} \leqslant a_n$

Ciąg (a_n) jest ograniczony z góry $\Leftrightarrow$ $\exists M \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ a_n \leqslant M$
(z dołu) $\exists m \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}\ (a_n \geqslant m)$
(a_n) jest ograniczony $\Leftrightarrow$ (a_n) jest ograniczony z dołu i z góry

PRZ. Czy ciąg o wyrazie ogólnym $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ jest monotoniczny? Czy jest ograniczony?

DEF. (Cauchy'ego granicy właściwej ($g \in \mathbb{R}$) ciągu)
$\lim_{n\to\infty} a_n = g \overset{\text{df}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0\ |a_n - g| < \varepsilon$

PRZ. $a_n = \frac{1}{n} \quad g = 0$

DEF. (granicy niewłaściwej $+\infty$)
$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0\ a_n > M$

Ciąg, który nie ma granicy nazywamy niezbieżnym.

TW. (o jednoznaczności granicy)
Jeśli ciąg posiada granicę, to tylko jedną.

TW. (o zachowaniu **słabej** nierówności)
$(\exists M \in \mathbb{R}\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0\ a_n \underset{(\geqslant)}{\leqslant} M \wedge \lim\limits_{n\to\infty} a_n = g) \Rightarrow g \underset{(g\geqslant A)}{\leqslant} A$

PRZ. $a_n = \frac{1}{n}$
$\forall n \in \mathbb{N}\ a_n > 0 \Rightarrow g > 0$? nie!

TW. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$

TW. Zał. $a_n = a_0q^n$ - ciąg geometryczny, gdzie $|q| < 1$
Teza: $\lim\limits_{n\to\infty} a_0q^n = 0$

TW. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
$\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

TW.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1,\ a > 0$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

PRZ. Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n}$

TW. (o działaniach arytmetycznych na ciągach)
Zał.
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$
Wtedy:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} b_n (= a \pm b)$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n (= a \cdot b)$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} (= \frac{a}{b})$ (o ile $\forall n \in \mathbb{N}\ b_n \neq 0$ oraz $b \neq 0$).

PRZ. Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2-3n+4}{4n^3-2n^2+3n+5}$

PRZ. Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{2n}-3^n}{5\cdot 3^n-4^n}$

TW. (o ciągu monotonicznym i ograniczonym)
Każdy ciąg monotoniczny i ograniczony jest zbieżny (do granicy właściwej)
$[\exists M \in \mathbb{R}\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \ \forall n \geqslant n_0\ \ (a_n \leqslant M \wedge (a_{n+1} \geqslant a_n))] \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} a_n = g (\leqslant M)$
(ciąg ograniczony od góry od pewnego indeksu i niemalejący od pewnego indeksu)

Analogicznie dla ciągu malejącego (nierosnącego) i ograniczonego od dołu.

TW. (zasada indukcji matematycznej)
Zał:

1. $T(1)$
2. $\forall n \in \mathbb{N}\ (T(n) \Rightarrow T(n+1))$

Teza: $\forall n \in \mathbb{N}\ T(n)$.

PRZ. Pokaż, że ciąg rekurencyjny jest zbieżny i oblicz jego granicę.
$a_1 = 1$
$\forall n \in \mathbb{N}\ \ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$

TW. (o trzech ciągach)
Zał:

1. $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geqslant n_0 \quad a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g = \lim\limits_{n\to\infty} c_n$

Teza: $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = g$

PRZ. Oblicz granicę ciągu $b_n = \sqrt[n]{n+2^n}$.

TW. (o ciągu ograniczonym i zbieżnym do 0)
Zał:

1. (a_n) - ograniczony
2. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

Teza: $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = 0$

PRZ. Oblicz granicę ciągu $\frac{n^2 \sin n}{n^3+2n-1}$

TW.

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n = e = 2,718...$ - stała Eulera
2. Jeśli $a_n \to +\infty$ to $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$.

Ćw. Pokaż, że ciąg $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ jest rosnący i ograniczony od góry (przez 3).

Symbole nieoznaczone (7)
$\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right], [\infty-\infty], [0\cdot\infty], [1^\infty], [0^0], [\infty^0]$

PRZ.
$[\infty-\infty] \quad \sqrt{n+1}-\sqrt{n} \to 1$
$[\infty^0] \quad \sqrt[n]{n} \to 1$
$[0^0] \quad \sqrt[n]{\frac{1}{n}} \to 1$
$[0^0] \quad \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} \to 0$

PODCIĄGI

DEF. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - ciąg
Niech $\mathbb{N} \ni k \to n_k \in \mathbb{N}$ rosnący ciąg liczb naturalnych
$(n_{k+1} > n_k) \forall k \in \mathbb{N}$
Ciąg $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ nazywamy **podciągiem** ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

PRZ. $a_n : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$
$n_k : 2, 4, 6, \dots$. czyli $n_k = 2k$
$a_{n_k} : \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \dots$
$(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$, gdzie $a_{2k} = \frac{1}{2k}$

TW. Jeśli $\lim_{n\to\infty} a_n = g$, to dla każdego podciągu $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ciągu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zachodzi $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = g$
(Jeśli ciąg jest zbieżny do g, to każdy podciąg tego ciągu też jest zbieżny do g).

WN. Jeśli istnieją dwa podciągi $(a_{n_k}), (a_{n_i})$ ciągu (a_n) takie, że $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} \neq \lim_{i\to\infty} a_{n_i}$ to ciąg (a_n) nie jest zbieżny.

PRZ. Pokaż, że ciąg $a_n = \cos n\pi$ nie jest zbieżny.

TW. (Bolzano-Weierstrassa)
Jeśli ciąg jest ograniczony, to ma podciąg zbieżny (do granicy właściwej).

PRZ. Z ciągu $a_n = n$ nie da się wybrać podciągu zbieżnego (do granicy właściwej).

DEF. **Granicą górną** ciągu (a_n) (limes superior ciągu a_n) nazywamy
$\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup\{g : g$ jest granicą podciągu zbieżnego ciągu $(a_n)\}$
Granicą dolną ciągu (a_n) (limes inferior ciągu a_n) nazywamy
$\liminf_{n\to\infty} a_n = \inf\{g : g$ jest granicą podciągu zbieżnego ciągu $(a_n)\}$

PRZ. Oblicz granicę górną i dolną ciągu $a_n = \sin\frac{n\pi}{2}$.

GRANICA FUNKCJI

DEF. Otoczeniem punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ o promieniu $r > 0$ nazywamy przedział $(x_0 - r, x_0 + r)$ i oznaczamy przez $U(x_0, r)$.
Sąsiedztwem punktu $x_0 \in \mathbb{R}$ o promieniu $r > 0$ nazywamy $(x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r)$ i oznaczamy przez $S(x_0, r)$.
$S^+(x_0, r) = (x_0, x_0 + r)$ - sąsiedztwo prawostronne punktu x_0
$S^-(x_0, r) = (x_0 - r, x_0)$ - sąsiedztwo lewostronne punktu x_0.
Zbiór wszystkich otoczeń punktu x_0 oznaczamy przez $ot(x_0)$.
Otoczeniem (sąsiedztwem)$+\infty$ nazywamy przedział postaci $(K, +\infty)$, gdzie $K \in \mathbb{R}$ i oznaczamy przez $U(+\infty, K)$.
Analogicznie, otoczeniem (sąsiedztwem) $-\infty$ nazywamy przedział postaci$(-\infty, K) = U(-\infty, K)$.

DEF. (Heinego granicy funkcji)
$f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subset \mathbb{R}$
$x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$
f jest określona w pewnym sąsiedztwie punktu x_0
$g \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \overset{df}{\Leftrightarrow} \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spełniającego:

1. $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in D_f$
2. $\forall n \in \mathbb{N}\ x_n \neq x_0$
3. $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$

zachodzi $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = g$

PRZ. Oblicz $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$.

DEF. (granic jednostronnych)
Granica lewostronna funkcji f w punkcie x_0:
f jest określona w pewnym lewostronnym sąsiedztwie punktu x_0
$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = g \Leftrightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ spełniającego:

1. $x_n \in D_f$
2. $x_n < x_0$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

zachodzi $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = g$

Analogicznie definiujemy granicę prawostronną funkcji $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$.

TW. (WKW na istnienie granicy)
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = g$.
(f ma granicę wtedy i tylko wtedy gdy f ma obie granice jednostronne i są one równe)

PRZ. $f(x) = sgn(x) = \begin{cases} -1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$

TW. (o arytmetyce granic funkcji)
Zał:
f, g są określone w sąsiedztwie x_0 oraz f i g mają granice w x_0.
Wtedy:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \pm \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
2. $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$
3. $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$ (o ile w pewnym sąsiedztwie x_0 $g(x) \neq 0$ oraz $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$).

Uwaga. Twierdzenie powyższe zachodzi również w przypadku granic jednostronnych.

PRZ. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2\cdot 5^x - 2^x}{3^x - 4\cdot 5^x}$
$\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-1}{\sqrt{1-x}}$

TW. (o trzech funkcjach)
Zał.

1. f, g, h są określone na pewnym sąsiedztwie S punktu x_0
2. $\forall x \in S\ f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$

3. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = g$

Teza: $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = g$

PRZ. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}$

TW. Jeżeli $\lim\limits_{x\to x_0} f(x_0) = 0$ i g jest ograniczona w pewnym sąsiedztwie x_0, to $\lim\limits_{x\to x_0}((f(x)\cdot g(x)) = 0.$

Uwaga. Powyższe 3 twierdzenia zachodzą również w przypadku granic jednostronnych.

TW. (granice specjalne)

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x-1}{x} = \ln a,\ a>0$
4. Jeśli $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty(-\infty)$, to $\lim\limits_{x\to x_0} \left(1+\dfrac{1}{f(x)}\right)^{f(x)} = e$

PRZ. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$

TW. (o granicy funkcji złożonej $g(f(x))$)

Zał: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$
$\forall x \in S(x_0, r)\ f(x) \neq y_0$
$\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = z_0$
Teza: $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = z_0$

CIĄGŁOŚĆ FUNKCJI

DEF. f określona w otoczeniu punktu $x_0 \in D_f$

f jest ciągła w $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
f jest lewostronnie (prawostronnie) ciągła w $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^-\,(x_0^+)} f(x) = f(x_0)$

PRZ. Czy $f(x) = sgn(x)$ jest ciągła w 0?

PRZ. Dla jakiej wartości parametru a funkcja $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin 5x}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$

jest ciągła w 0?

TW. (o działaniach na funkcjach ciągłych)
1. Suma, różnica, iloczyn funkcji ciągłych w punkcie x_0 jest funkcją ciągłą w x_0.
Iloraz $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ funkcji ciągłych jest ciągły w x_0 (o ile $g(x) \neq 0$ w pewnym otoczeniu punktu x_0).
2. Jeśli f jest ciągła w x_0 i g jest ciągła w $y_0 = f(x_0)$, to złożenie funkcji $g \circ f$ jest ciągłe w x_0.

DEF. f jest ciągła na zbiorze $A \subset D_f \Leftrightarrow \forall x_0 \in A$ f jest ciągła w x_0.

Ozn. $C(A)$ - zbiór wszystkich funkcji ciągłych na zbiorze A
$f \in C(A) \Leftrightarrow f$ jest ciągła na zbiorze A

TW. Wszystkie funkcje **elementarne są ciągłe** na swoich dziedzinach.

PRZ. $f(x) = \log_2(x^2 \cos x)$

Własności funkcji ciągłych.

TW. (o lokalnym zachowaniu znaku)
Zał: 1. f jest określona w pewnym otoczeniu punktu x_0
2. f jest ciągła w x_0
3. $f(x_0) \underset{(<)}{>} 0$
Wtedy istnieje takie otoczenie U punktu x_0, że $\forall x \in U$ $f(x) \underset{(<)}{>} 0$

TW. (o własności Darboux)
$f \in C([a,b]) \wedge f(a) \neq f(b)$
c - dowolna liczba pomiędzy $f(a)$ i $f(b)$

Teza: istnieje takie $x_0 \in (a,b)$, że $f(x_0) = c$.

PRZ. Każdy wielomian nieparzystego stopnia ma przynajmniej jeden pierwiastek rzeczywisty.

TW. (Weierstrassa o osiąganiu kresów)
Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale domkniętym $[a,b]$, to istnieje

1. $x_1 \in [a,b]$, $f(x_1) = \inf\{f(x) : x \in [a,b])\}$ - wartość najmniejsza funkcji f na $[a,b]$
2. $x_2 \in [a,b]$, $f(x_2) = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$ - wartość największa funkcji f na $[a,b]$

PRZ. $f(x) = x$ na $(0,1)$ nie osiąga swoich kresów (nie ma wartości najmniejszej ani największej)

RACHUNEK RÓŻNICZKOWY FUNKCJI JEDNEJ ZMIENNEJ

DEF. $f : D_f \to \mathbb{R}$, $x_0 \in D_f$
f określona na pewnym otoczeniu U punktu x_0 ($x_0 \in U \subset D_f$)

Jeśli istnieje granica właściwa $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, to mówimy, że funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0. Wartość tej granicy oznaczamy przez $f'(x_0)$ i nazywamy **pochodną** funkcji f w punkcie x_0.

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Inny zapis: $h = x - x_0, \quad x \to x_0 \Leftrightarrow h \to 0$

$f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

Inny zapis: $f'(x_0) = \dfrac{df}{dx}(x_0)$

PRZ. $s(t)$-położenie punktu w chwili t

$\dfrac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0}$ - prędkość średnia w czasie od t_0 do t_1

$\lim\limits_{t_1 \to t_0} \dfrac{s(t_1) - s(t_0)}{t_1 - t_0} = s'(t_0) = v(t_0)$ - prędkość chwilowa w chwili t_0

$\lim\limits_{t_1 \to t_0} \dfrac{Q(t_1) - Q(t_0)}{t_1 - t_0} = I(t_0)$ - natężenie prądu w chwili t_0

PRZ. Oblicz pochodną funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ w $x_0 \in D_f$.

PRZ. Oblicz pochodną funkcji $f(x) = |x|$ w $x_0 = 0$.

DEF. Niech f będzie określona przynajmniej w pewnym w lewostronnym otoczeniu $U^- = (x_0 - \delta, x_0]$ punktu x_0.

Pochodną lewostronną funkcji f w punkcie x_0 nazywamy $f'_-(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ (o ile jest to granica właściwa).

Analogicznie definiujemy pochodną prawostronną w punkcie.

TW. (WKW istnienia pochodnej w punkcie)

$f'(x_0) = g \Leftrightarrow f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = g$

Funkcja f ma pochodną w punkcie $x_0 \Leftrightarrow$ pochodne jednostronne w punkcie x_0 istnieją i są sobie równe.

TW. (WK istnienia pochodnej)

Jeśli f jest różniczkowalna w x_0, to f jest ciągła w x_0.

Dowód: $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0$.

Zatem $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ więc f jest ciągła w x_0.

PRZ. Czy $f(x) = sgn(x)$ jest różniczkowalna w $x_0 = 0$?

PRZ. Czy $f(x) = |x|$ jest różniczkowalna w $x_0 = 0$?

TW. (interpretacja geometryczna pochodnej)

Funkcja f jest różniczkowalna w $x_0 \Leftrightarrow$ istnieje styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$.
Ponadto:

1. $\operatorname{tg} \alpha = f'(x_0)$, gdzie α jest kątem pomiędzy dodatnim kierunkiem osi OX, a prostą styczną,
2. $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ jest równaniem stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$.

PRZ. Wyznacz równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ w punkcie $x_0 = 1$.

Wzory na pochodne ważniejszych funkcji elementarnych.
$(c)' = 0$
$(x^r)' = rx^{r-1}, \quad r \in \mathbb{R}$
$(\sin x)' = \cos x$
$(\cos x)' = -\sin x$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$
$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -1 - \operatorname{ctg}^2 x$
$(e^x)' = e^x$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

DEF. Mówimy, że f jest różniczkowalna na zbiorze $A \Leftrightarrow f$ jest różniczkowalna w każdym punkcie $x \in A$.

DEF. Jeśli f jest różniczkowalna na zbiorze A, to funkcję $f' : A \to \mathbb{R}$ nazywamy **funkcją pochodną** funkcji f.
$f' : A \ni x \to f'(x) \in \mathbb{R}$

PRZ. Funkcją pochodną funkcji $f(x) = \sqrt{x}$ jest funkcja $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (dla $x > 0$).

TW. (o działaniach arytmetycznych na pochodnych)
Zał. f i g różniczkowalne w x
Teza

1. $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$, c - stała $\in \mathbb{R}$
2. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4. $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$ (o ile g jest różna od 0 w pewnym otoczeniu punktu x).

Dowód: 3)

$$[f(x) \cdot g(x)]' = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) + f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

PRZ. Oblicz $\left(\frac{e^x \sin x}{x^2}\right)'$

TW. (o pochodnej funkcji złożonej)
Zał.
f - różniczkowalna w x_0
g - różniczkowalna w $y_0 = f(x_0)$
Teza: $g \circ f$ jest różniczkowalna w x_0 i $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

PRZ. Oblicz pochodne funkcji:

$h(x) = \sqrt{x^2+1}$
$h(x) = \cos^5 3x$
$h(x) = x^x$
$h(x) = \cos x^{\sin x}$
$h(x) = x^{(x^x)}$

TW. (o pochodnej funkcji odwrotnej)

Zał:

1. $f : U \to V$ jest bijekcją,
   gdzie U jest otoczeniem punktu x_0 oraz V jest otoczeniem punktu $y_0 = f(x_0)$,

2. f jest różniczkowalna w x_0,

3. $f'(x_0) \neq 0$,

Teza: f^{-1} jest różniczkowalna w $y_0 = f(x_0)$ oraz $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

PRZ. Oblicz $(\mathrm{arctg} x)'$ korzystając z tw. o pochodnej funkcji odwrotnej.

c. d. wzorów podstawowych na pochodne:

$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad x \in (-1,1)$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad x \in (-1,1)$

$(\mathrm{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$(\mathrm{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$

Uwaga. Pochodne funkcji elementarnych są funkcjami elementarnymi.

Spostrzeżenie

$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ dla x bliskich x_0.

PRZ. Oblicz przybliżoną wartość $\mathrm{arctg} 1,05$

DEF. (druga pochodna funkcji)

$f : U \to \mathbb{R}$, f różniczkowalna w otoczeniu U punktu x_0

$f' : U \ni x \to f'(x) \in \mathbb{R}$

Drugą pochodną (pochodną 2-go rzędu) funkcji f w punkcie x_0 nazywamy

$f''(x_0) \overset{df}{=} \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}$ (o ile istnieje).

Prościej: $f''(x) = (f'(x))'$.

Ogólnie. Jeśli istnieje pochodna rzędu (n-1)-go funkcji f w otoczeniu punktu x, to **pochodna rzędu n-tego** jest równa $f^{(n)}(x) \stackrel{df}{=} \left(f^{(n-1)}(x)\right)'$.

Oznaczenia:
$A \subseteq \mathbb{R}$
$D^n(A)$ - zbiór funkcji n-krotnie różniczkowalnych na A
$C^n(A)$ - zbiór funkcji n-krotnie różniczkowalnych na A i takich, że $f^{(n)}$ jest ciągła na A
$C^n(A) \subset D^n(A)$

PRZ.

Wyznacz wzór na n-tą pochodną funkcji $f(x) = \ln x$.

TW. (o zerowaniu się pochodnej w punkcie, w którym funkcja przyjmuje wartość ekstremalną)
Zał:

1. $f \in C([a,b])$
2. $f \in D((a,b))$
3. istnieje takie $x_0 \in (a,b)$, że $f(x_0) = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ lub $f(x_0) = \min\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

Teza: $f'(x_0) = 0$

Dowód: Pokażemy dla przypadku, gdy $f(x_0) = \max\limits_{x\in[a,b]} f(x)$

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{?}{=} 0$$

Ip.
$x < x_0 \Leftrightarrow x - x_0 < 0$
$f(x) \leqslant f(x_0)$, bo $f(x_0)$ - max
$f(x) - f(x_0) \leqslant 0$
$\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$
$\lim\limits_{x\to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$ (co wynika z twierdzenia zachowaniu nierówności dla funkcji)
$f'_-(x_0) \geqslant 0$

IIp.
$x > x_0 \Leftrightarrow x - x_0 > 0$
$f(x) - f(x_0) \leqslant 0$
$\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$
$\lim\limits_{x\to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant 0$
$f'_+(x_0) \leqslant 0$

$f'_-(x_0) \geqslant 0 \wedge f'_+(x_0) \leqslant 0 \Rightarrow f'(x_0) = 0.$ □

TW. (Rolle'a)
Zał:

1. $f \in C([a,b])$

2. $f \in D((a,b))$

3. $f(a) = f(b)$

Teza: $\exists c \in (a,b) \quad f'(c) = 0.$

Dowód:

I f jest stała na $[a,b]$ tzn. $\forall x \in [a,b] f(x) = f(a) \Rightarrow f'(c) = 0 \; \forall c \in (a,b).$

II $f(x)$ nie jest stała $\overset{\text{Tw. Weierstrassa}}{\Longrightarrow} \exists c \in (a,b) \; f(c) = \max_{x\in[a,b]} f(x) \vee f(c) = \min_{x\in[a,b]} f(x)$

z poprzedniego Tw. $f'(c) = 0.$ $\square$

TW. (Lagrange'a)
Zał:

1. $f \in C([a,b])$

2. $f \in D((a,b))$

Teza: $\exists c \in (a,b) \; f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Dowód: Stosujemy twierdzenie Rolle'a do funkcji $h(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ na $[a,b]$.

$$h(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a) = f(a)$$
$$h(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a) = f(b) - (f(b)-f(a)) = f(a)$$
$$\Rightarrow h(a) = h(b) \Rightarrow \exists c \in (a,b) \; h'(c) = 0$$
$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot 1$$
$$0 = h'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad \square$$

TW. (Cauchy'ego)

1. $f,g \in C([a,b])$

2. $f,g \in C((a,b))$

3. $\forall x \in (a,b) \; g'(x) \neq 0$

Wtedy $\exists c \in (a,b) \; \dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

Twierdzenia Rolle'a, Lagrange'a i Cauchy'ego nazywamy **twierdzeniami o wartości średniej** rachunku różniczkowego.

TW. (reguła de L'Hospitala)
Zał:

1. f i g są różniczkowalne pewnym sąsiedztwie S punktu x_0

2. $\forall x \in S \; g(x) \neq 0 \wedge g'(x) \neq 0$

3. $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 \wedge \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0\right)$ lub $\left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty \wedge \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty\right)$

4. istnieje $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Teza: istnieje $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

Uwaga. Twierdzenie de L'Hospitala można stosować do granic niewłaściwych i do granic jednostronnych.

PRZ. obliczyć granice:

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\sin x}{x^3}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$

TW. (warunki wystarczające monotoniczności funkcji)
Niech f będzie funkcją różniczkowalną na przedziale $I = (a,b)$.
Jeśli $\forall x \in I$:

1. $f'(x) = 0$, to f jest stała w I
2. $f'(x) > 0$, to f jest rosnąca na I
3. $f'(x) \geqslant 0$, to f jest niemalejąca na I
4. $f'(x) < 0$, to f jest malejąca na I
5. $f'(x) \leqslant 0$, to f jest nierosnąca na I

Dowód: 2)
$x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2$
z tw. Lagrange'a $\exists c \in (x_1, x_2)\ f'(c) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$
$f'(c) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} < 0$
$x_2 - x_1 > 0 \Leftrightarrow f(x_2) - f(x_1) > 0$
$f(x_2) > f(x_1)$ $\square$

PRZ. Czy $f(x) = \dfrac{1}{x}$ jest malejąca na całej dziedzinie?

PRZ. Pokazać, że $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}\ \forall x \in [-1,1]$

EKSTREMA LOKALNE funkcji

DEF. Niech f będzie określona w pewnym otoczeniu U punktu x_0.
Mówimy, że f ma w punkcie x_0 $\underset{\text{(minimum)}}{\text{maksimum}}$ lokalne $\overset{df}{\Leftrightarrow}$ istnieje takie sąsiedztwo $S(x_0,\delta) \subset U$, w którym $\forall x \in S(x_0,\delta)\ f(x) \underset{(>)}{<} f(x_0)$

TW. (Fermata, warunek konieczny istnienia ekstremum)
Zał:

1. f przyjmuje ekstremum lokalne w x_0
2. f jest różniczkowalna w x_0

Teza: $f'(x_0) = 0$

Dowód: Analogiczny do dowodu twierdzenia o zerowaniu się pochodnej w punkcie, w którym funkcja osiąga wartość ekstremalną.

TW. (I warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego)

1. f jest różniczkowalna w pewnym otoczeniu U punktu x_0
2. $f'(x_0) = 0$
3. istnieje takie sąsiedztwo $S(x_0, \delta)$, że:
   a. jeśli $(\forall x \in S^-(x_0,\delta)\ f'(x) > 0$ oraz $\forall x \in S^+(x_0,\delta)\ f'(x) < 0)$ to f przyjmuje w x_0 maksimum lokalne,
   b. jeśli $(\forall x \in S^-(x_0,\delta)\ f'(x) < 0$ oraz $\forall x \in S^+(x_0,\delta)\ f'(x) > 0)$ to f przyjmuje w x_0 minimum lokalne.

Dowód: (wynika z tw. Lagrange'a).

PRZ. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

Ekstrema globalne

PRZ. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x^3|x+2|$ osiąganą na przedziale $[-4, 1]$.

Spostrzeżenie Jeśli f jest ciągła na przedziale domkniętym, to aby wyznaczyć wartość największą i najmniejszą wystarczy wziąć pod uwagę wartości funkcji osiągane w punktach:
a) w których pochodna jest równa 0,
b) w których funkcja nie jest różniczkowalna,
c) które są końcami przedziału.

PRZ. Wyznaczyć najmniejszą i największą wartość funkcji $f(x) = x^x$ osiąganą na całej dziedzinie.

TW. (Taylora)
Zał:

1. U - otoczenie punktu x_0
2. $x \in U$
3. $f \in C^n(U)$

Teza: $\exists c \in (x_0, x)$

$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + R_n(x_0, x)$,

gdzie $R_n(x_0, x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - x_0)^n$ - reszta Lagrange'a we wzorze Taylora

$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x_0, x)$, (gdzie przyjmujemy, że $f^{(0)}(x) = f(x)$)

Inny zapis wzoru Taylora: $h = x - x_0$

$f(x_0 + h) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}h^{n-1} + R_n(x_0, x)$,

gdzie $R_n(x_0, x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}h^n$

Inny zapis reszty Lagrange'a:

$\exists \theta \in (0, 1)\ R_n(x) = \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{n!}(x - x_0)^n$

Jeśli $x_0 = 0$, to wzór Taylora nazywany jest wzorem **MacLaurina**.

$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}x^{n-1} + R_n(x)$

$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}x^n \quad c \in (0, x)$

DEF. Wielomian $W(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1}$ nazywamy wielomianem Taylora dla funkcji f w punkcie x_0

Spostrzeżenie $\forall k = 0, \ldots, n-1 \quad W^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$

WN. 1. $f(x) \cong W(x) \quad \forall x \in U$

2. $|f(x) - W(x)| = |R_n(x)| \quad \forall x \in U$

PRZ. Oblicz $\sqrt[10]{e}$ z dokładnością do 10^{-4}.

PRZ. Wyznacz dokładność wzoru przybliżonego $\sin x \cong x - \frac{x^3}{6}$ dla $|x| \leqslant 0,1$.

TW. (II warunek wystarczający istnienia ekstremum lokalnego)
Zał:

1. U - otoczenie punktu x_0
2. $f \in C^2(U)$
3. $f'(x_0) = 0$

Teza:

1. Jeśli $f''(x_0) > 0$, to f przyjmuje minimum lokalne w x_0.
2. Jeśli $f''(x_0) < 0$, to f przyjmuje maksimum lokalne w x_0.

Dowód: 1) z tw. Taylora
$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + f''(c)(x - x_0)^2, \quad c \in (x_0, x)$
$f(x) = f(x_0) + f''(c)(x - x_0)^2$
Jeśli $f''(x_0) > 0$, to ponieważ f'' jest ciągła, to f'' zachowuje znak w pewnym otoczeniu U' punktu x_0. Stąd:
$\forall x \in U' \quad f''(c) > 0$, $c \in (x_0, x)$
$\Rightarrow f(x) = f(x_0) + \underbrace{f''(c)}_{>0}\underbrace{(x - x_0)^2}_{>0} \Rightarrow f(x) > f(x_0) \; \forall x \in U', \quad x \neq x_0$
$\Rightarrow$ w x_0 f przyjmuje minimum lokalne

TW.
Zał:

1. U - otoczenie punktu x_0
2. $f \in C^{2n}(U)$
3. $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(2n-1)}(x_0) = 0$

Teza:

1. Jeśli $f^{(2n)}(x_0) > 0$, to f w x_0 przyjmuje minimum lokalne.
2. Jeśli $f^{(2n)}(x_0) < 0$, to f w x_0 przyjmuje maksimum lokalne.

PRZ. Pokaż, że $f(x) = x^4$ ma minimum lokalne w 0.

Funkcje **wypukłe i wklęsłe**

DEF.
I - przedział $\subset \mathbb{R}$, $I \subset D_f$
Funkcję f nazywamy wypukłą w $I \Leftrightarrow$ gdy nadwykres funkcji f czyli $\{(x,y) : x \in I, y \geqslant f(x)\}$ jest zbiorem wypukłym.
Funkcję f nazywamy wklęsłą w $I \Leftrightarrow$ gdy nadwykres funkcji -f czyli jest zbiorem wypukłym.

DEF. f jest różniczkowalna w $I = (a,b)$
f jest ściśle $\underset{\text{(wklęsła)}}{\text{wypukła}}$ w $I \Leftrightarrow$
$\forall x_0 \in I\ \forall x \in I,\ x \neq x_0 \quad f(x) \underset{(>)}{<} f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

TW. (warunek wystarczający wypukłości i wklęsłości funkcji)
Zał. $f \in C^2(I)$,
Teza:

1. Jeśli $\forall x \in I \quad f''(x) > 0$, to f jest wypukła w I.
2. Jeśli $\forall x \in I \quad f''(x) > 0$, to f jest wklęsła w I.

Dowód: 1) z tw. Taylora:
$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dfrac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2,\ x \in I,\ c \in (x_0, x),\ c \in I,$
$f''(c) > 0, \quad R_2(x) > 0\ \forall x \neq x_0,\ x \in I$
$f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

DEF.
f jest określona w pewnym otoczeniu U punktu x_0,
f jest ciągła w x_0,
Mówimy, że punkt $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia funkcji $f \Leftrightarrow$ w jednym sąsiedztwie jednostronnym punktu x_0 funkcja f jest wypukła, a w drugim wklęsła.

PRZ. $f(x) = x^3$

TW. (warunek konieczny istnienia punktu przegięcia)
Zał:

1. U - otoczenie punktu x_0
2. $f \in C^2(U)$
3. punkt $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia funkcji f

Teza: $f''(x_0) = 0$

TW. (warunek wystarczający istnienia punktu przegięcia)
Zał:

1. f jest określona w pewnym otoczeniu U punktu x_0,
2. f jest klasy C^2 na pewnym sąsiedztwie S punktu x_0,
3. f jest ciągła w x_0,

4. $\exists S^-(x_0,\delta)\ \forall x \in S^-(x_0,\delta) \quad f''(x) \underset{(<)}{>} 0$ oraz
   $\exists S^+(x_0,\delta)\ \forall x \in S^+(x_0,\delta) \quad f''(x) \underset{(>)}{<} 0$

Teza: f ma w punkcie x_0 punkt przegięcia

PRZ. $f(x) = e^{-x^2}$

Asymptoty

DEF. Mówimy, że prosta $x = x_0$ jest **asymptotą pionową lewostronną** funkcji $f \overset{df}{\Leftrightarrow}$

1. f jest określona w pewnym lewostronnym sąsiedztwie punktu x_0
2. $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$

Analogicznie określamy asymptotę pionową **prawostronną**.
Jeśli prosta $x = x_0$ jest asymptotą pionową lewostronną i prawostronną to nazywamy ją asymptotą pionową **obustronną**.

PRZ. Wyznacz asymptoty pionowe funkcji $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$.

Spostrzeżenie Jeśli f jest ciągła w x_0, to $x = x_0$ nie jest asymptotą pionową funkcji f.

DEF. Prostą $y = ax + b$ nazywamy **asymptotą ukośną** funkcji f w $+\infty \overset{df}{\Leftrightarrow}$

1. f jest określona w otoczeniu $+\infty$
2. $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$

Analogicznie definiujemy asymptotę ukośną w $-\infty$.
Jeśli $a = 0$, to asymptotę nazywamy **poziomą**.

TW. Funkcja $f(x)$ ma asymptotę ukośną $y = ax + b$ w $+\infty \Leftrightarrow$
$a = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ i $b = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - ax]$.

Analogiczne twierdzenie zachodzi dla asymptoty ukośnej w $-\infty$.

PRZ. $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

PRZ. Wyznacz wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = x \ln(1 + \frac{1}{x})$.

DEF. $f : D \to \mathbb{R}, D \subseteq \mathbb{R}$
Funkcję f nazywamy **parzystą** $\overset{df}{\Leftrightarrow}$

1. $\forall x \in D \ -x \in D$ (D - zbiór symetryczny względem 0)
2. $\forall x \in D \quad f(-x) = f(x)$

DEF. Funkcję f nazywamy **nieparzystą** $\overset{df}{\Leftrightarrow}$

1. $\forall x \in D \ -x \in D$

2. $\forall x \in D \quad f(-x) = -f(x)$

PRZ. Pokaż, że funkcja $f(x) = \sin x$ jest nieparzysta.

Spostrzeżenie Wykres funkcji parzystej jest symetryczny względem osi OY, a wykres funkcji nieparzystej jest symetryczny względem punktu $(0,0)$.

DEF. $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}$ Funkcję f nazywamy **okresową** $\overset{df}{\Leftrightarrow}$ gdy istnieje takie $T > 0$, że:

1. $\forall x \in D \quad x + T \in D$
2. $\forall x \in D \quad f(x+T) = f(x)$

Liczbę T nazywa się wówczas **okresem** funkcji f.

PRZ. Pokaż, że funcja $f(x) = \cos x$ jest okresowa.

BADANIE PRZEBIEGU ZMIENNOŚCI FUNKCJI

I Analiza wzoru funkcji

1. Dziedzina
2. Punkty przecięcia z osiami ukł. wsp.
3. Własności szczególne (parzystość, nieparzystość, okresowość, ciągłość)
4. Granice na krańcach dziedziny
5. Asymptoty

II Analiza pochodnej funkcji (f')

6. Obliczamy f', rozwiązujemy równanie $f'(x) = 0$ oraz nierówności $f'(x) > 0$ i $f'(x) < 0$.
7. Przedziały monotoniczności
8. Ekstrema lokalne

III Analiza drugiej pochodnej funkcji (f'')

9. Obliczamy f', rozwiązujemy równanie $f''(x) = 0$ oraz nierówności $f''(x) > 0$ i $f''(x) < 0$.
10. Przedziały wypukłości i wklęsłości
11. Punkty przegięcia

IV Tabelka

V Szkic wykresu funkcji

PRZ. Zbadaj przebieg zmienności funkcji $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$.

PRZ. Zbadaj przebieg zmienności funkcji $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$

RACHUNEK CAŁKOWY FUNKCJI JEDNEJ ZMIENNEJ

DEF. $f : I \to \mathbb{R}, \quad I \subseteq \mathbb{R}$

Funkcję $F : I \to \mathbb{R}$ nazywamy funkcją pierwotną funkcji f na przedziale $I \overset{df}{\Leftrightarrow}$ gdy
$\forall x \in I \quad F'(x) = f(x)$.

DEF. Jeśli funkcja f ma funkcję pierwotną na I, to f nazywamy całkowalną w sensie Newtona na $I \Leftrightarrow$.

PRZ. Wyznacz funkcje pierwotne funkcji $f(x) = 2x$ oraz funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$.

TW. F jest funkcją pierwotną funkcji f na I.
Teza: G jest funkcją pierwotną funkcji f na $I \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}\ \forall x \in I\ G(x) = F(x) + C$

Dowód: $(\Leftarrow)$ $\quad G(x) = F(x) + C$
$G'(x) = F'(x) + (C)'$
$G'(x) = f(x) \Rightarrow G$ jest funkcją pierwotną funkcji f.

$(\Rightarrow)$ G jest funkcją pierwotną funkcji f na F
$\Leftrightarrow \forall x \in I\ G'(x) = f(x)$.
$\forall x \in I \quad h(x) \overset{df}{=} G(x) - F(x)$
$\forall x \in I \quad h'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$
$\Rightarrow h(x) = C$ - stała
$G(x) - F(x) = C$
$G(x) = F(x) + C$ ■

DEF. f - całkowalna w sensie Newtona
F - funkcja pierwotna funkcji f
Całką nieoznaczoną funkcji f nazywamy zbiór wszystkich funkcji pierwotnych funkcji f, czyli $\{F(x) + C :\ C \in \mathbb{R}\}$.
Zapis. $\int f(x)dx = F(x) + C,\ C \in \mathbb{R}$
$\int$ - symbol całki
x - zmienna całkowania
$f(x)$ - funkcja podcałkowa
C - stała całkowania

Spostrzeżenie

1. Jeśli funkcja f ma funkcję pierwotną na I, to
   $\forall x \in I \left(\int f(x)dx \right)' = f(x)$
2. Jeśli funkcja f jest różniczkowalna na I, to
   $\forall x \in I \int f'(x)dx = f(x) + C, C \in \mathbb{R}$

DEF. f - całkowalna w sensie Newtona

F - funkcja pierwotna funkcji f na $[a,b]$

Całkę oznaczoną (Newtona) nazywamy

$$\int_a^b f(x)dx \overset{df}{=} F(b)-F(a) \text{ - liczba}$$

a - górna granica całkowania

b - dolna granica całkowania

Inny zapis: $F(b)-F(a) = [F(x)]_a^b = F(x)|_a^b$

Spostrzeżenie Wartość całki oznaczonej nie zależy od wyboru funkcji pierwotnej tzn.

jeśli F i G są funkcjami pierwotnymi funkcji f na $[a,b]$, to

$$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a) = G(b)-G(a).$$

Dowód: $G(x) = F(x)+C$

$G(b)-G(a) = F(b)+C-(F(a)+C) = F(b)-F(a).$

TW. (warunek wystarczający istnienia funkcji pierwotnej)

Jeśli funkcja f jest ciągła na I, to f ma pierwotną na I.

Uwaga. Funkcja pierwotna funkcji elementarnej nie musi być funkcją elementarną!

np. $\int e^{-x^2}dx,\ \int \frac{\sin x}{x}dx,\ \int \sqrt{1+x^3}dx,\ \int \cos(x^2)dx, \ldots$ nie są funkcjami elementarnymi.

CAŁKI FUNKCJI ELEMENTARNYCH

$$\int 0dx = 0+C$$

$$\int adx = ax+C$$

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1}+C,\ r \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x|+C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a}+C$$

$$\int e^x dx = e^x+C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x+C$$

$$\int \cos x dx = \sin x+C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x+C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx = -\operatorname{ctg} x+C$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x+C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \arcsin x+C$$

TW. f, g - całkowalne na I, $a \in \mathbb{R}$
Wtedy:

1. $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

2. $\int [af(x)]dx = a\int f(x)dx$

PRZ.
$\int (2x^3 - 4x^2 + 2x + 1)dx$
$\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$

TW. (wzór na całkowanie przez części)
$u, v \in C^1(I)$
Wtedy $\int u(x)v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)v(x)dx$

Dowód:
$(u(x)\cdot v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
$\int (u(x)\cdot v(x))'dx = \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx$
$u(x)\cdot v(x) = \int u'(x)v(x) + \int u(x)v'(x)dx$
$\int u(x)v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)v(x)dx.$ ■

Typ I.

PRZ. $\int x^2 \sin x dx$

Analogicznie całkujemy:
$\int W(x)\cos x dx$
$\int W(x)a^x dx$

Typ II.

PRZ. $\int x^2 \ln x dx$

PRZ. $\int \ln x dx$

Analogicznie całkujemy:
$\int W(x)\arcsin x dx$
$\int W(x)\arccos x dx$
$\int W(x)\operatorname{arctg} x dx$
$\int W(x)\ln x dx$

Typ III.

PRZ. $\int e^x \sin x dx$ - całka dwumienna

PRZ. $\int \sin^2 x dx$

TW. (o całkowaniu przez podstawienie)
Zał:

1) $f : J \to \mathbb{R}$, $\quad f$ całkowalna na J

2) $\varphi : I \to J$, $\quad \varphi \in C^1(I)$

Teza: $\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) + C$,
gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f.

Dowód: Wynika z tw. o pochodnej funkcji złożonej.

Inny zapis: $\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = \begin{vmatrix} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x) dx \end{vmatrix} = \int f(t) dt = F(t) \Big|_{t=\varphi(x)} + C = F(\varphi(x)) + C.$

PRZ.

1) $\int 2 \cos 2x dx$

2) $\int (3x-5)^{10} dx$

3) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx$

Spostrzeżenie $f \in C^1(I)$
Wtedy $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$

Dowód: $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \begin{vmatrix} t = f(x) \\ dt = f'(x) dx \end{vmatrix} = \int \frac{1}{t} dt = \ln |t| + C = \ln |f(x)| + C$

PRZ.
$\int \operatorname{tg} x dx$
$\int \operatorname{arctg} x dx$

CAŁKOWANIE FUNKCJI WYMIERNYCH
$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$
$P(x), Q(x)$ - wielomiany

DEF. Funkcję wymierną nazywamy **właściwą**, jeśli stopień wielomianu w liczniku jest mniejszy od stopnia wielomianu w mianowniku.

Spostrzeżenie Każdą funkcję wymierną da się przedstawić w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej.

Dowód: $P(x) = W(x) \cdot Q(x) + R(x)$ st. $R(x) <$st. $Q(x)$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = W(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}. \square$$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int W(x) dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$$

TW. Każdy wielomian $Q(x)$ da się rozłożyć na iloczyn wielomianów stopnia pierwotnego i wielomianów nierozkładalnych stopnia 2-go.

$Q(x) = a_n(x-x_1)^{k_1} \cdot (x-x_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (x^2+p_1x+q_1)^{l_1} \cdot (x^2+p_2x+q_2)^{l_2} \cdot \ldots,$

gdzie $\Delta = p_i^2 - 4q_i < 0$ dla każdego i.

PRZ.

a) $x^4 - 1 = (x^2-1)(x^2+1) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$

b) $x^4 + 1 = \ldots = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$

TW. Każdą funkcję wymierną właściwą da się w jednoznaczny sposób zapisać w postaci:

$\dfrac{R(x)}{Q(x)} = \dfrac{A_1}{x-x_1} + \dfrac{A_2}{(x-x_1)^2} + \ldots + \dfrac{A_k}{(x-x_1)^k} + \ldots$ - ułamki proste I-go rodzaju

$+\dfrac{B_1x+C_1}{(x^2+p_1x+q_1)} + \dfrac{B_2x+C_2}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \ldots + \dfrac{B_lx+C_l}{(x^2+p_1x+q_1)^l} + \ldots$ - ułamki proste II-go rodzaju

gdzie $A_1, \ldots, A_k, \ldots, B_1, \ldots, B_l, \ldots, C_1, \ldots, C_l, \ldots$ - stałe $\in \mathbb{R}$

PRZ. Rozłożyć na sumę ułamków prostych funkcje:

a) $\dfrac{4}{x^4-1}$

b) $\dfrac{6}{(x^2-1)(x-2)}$

c) $\dfrac{1}{x^2+x^4}$

Całkowanie ułamków prostych I-go rodzaju

1. $\displaystyle\int \frac{1}{x-x_0} dx = \ln|x-x_0| + C$

2. $\displaystyle\int \frac{1}{(x-x_0)^n} = \left| \begin{matrix} t = x-x_0 \\ dt = dx \end{matrix} \right| = \int t^{-n} dt = \frac{t^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{1}{1-n} \cdot \frac{1}{(x-x_0)^{n-1}} + C$

Całkowanie ułamków prostych II-go rodzaju:

PRZ.

a) $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2}dx$

b) $\int \frac{x+2}{(x^2+2x+3)^2}dx$

WN.

$$I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n}dx$$

$$I_1 = \int \frac{1}{1+x^2}dx = \text{arctgx}+C$$

$$I_n = \frac{x}{2(n-1)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}I_{n-1}$$

DEF. Jednomianem dwóch zmiennych nazywamy funkcję postaci ax^ny^m, gdzie $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ oraz a - stała.
Wielomianem dwóch zmiennych $W(x,y)$ nazywamy dowolną sumę skończoną jednomianów dwóch zmiennych.
Funkcją wymierną dwóch zmiennych nazywamy iloraz wielomianów dwóch zmiennych czyli $R(x,y) = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$

Analogicznie definiujemy jednomian, wielomian i funkcję wymierną n zmienyych.

CAŁKOWANIE FUNKCJI NIEWYMIERNYCH

I. $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx = *$, gdzie $R(x,y)$ jest funkcją wymierną, $a > 0$

Podstawienie Eulera: $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x \quad /()^2$$

$$ax^2+bx+c = t^2 - 2\sqrt{a}tx + ax^2$$

$$bx + 2\sqrt{a}tx = t^2 - c$$

$$x = \frac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}t}$$

$$dx = \left(\frac{t^2-c}{b+2\sqrt{a}t})\right)' dt$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \frac{\sqrt{a}(t^2-c)}{b+2\sqrt{a}t}$$

$$* = \int R_1(t)dt, \quad R_1 \text{ - funkcja wymierna jednej zmiennej } t$$

PRZ. Pokaż, że $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+A}} = \ln|x+\sqrt{x^2+A}|+C.$

II. **Metoda współczynników nieoznaczonych (Lagrange'a)**

$$\int \frac{Wn(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = W_{n-1}(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

PRZ. $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}dx$

III. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-x_0)^k\sqrt{ax^2+bx+c}} = \left|\begin{array}{c} t=\frac{1}{x-x_0} \\ x-x_0=\frac{1}{t} \\ x=\frac{1}{t}+x_0 \\ dx=-\frac{dt}{t^2}\end{array}\right| \to$ metoda współczynników Lagrange'a

PRZ. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2+2x}}$

IV. $\displaystyle\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_1}{q_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{p_n}{q_n}}\right) dx \leftarrow$ funkcja wymierna $n+1$ zmiennych

$\displaystyle = \left|\frac{ax+b}{cx+d} = t^s,\ s = NWW(q_1, \dots q_n)\right| \to$ całka funkcji wymiernej

PRZ. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}dx$

CAŁKOWANIE FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH

I. $\displaystyle\int \sin^n x \cos^m x dx = I,\ m,n \in \mathbb{Z}$

a) przynajmniej jedna z potęg jest nieparzysta, np. $m = 2k+1$

$$I = \int \sin^n x \cdot (\cos^2 x)^k \cdot \cos x dx = \left|\begin{array}{c} t=\sin x \\ dt = \cos x dx \\ \cos^2 x = 1-t^2\end{array}\right| = \int t^n(1-t^2)^k dt$$

b) obie potęgi są parzyste, $n,m \in \mathbb{N}$, korzystamy ze wzorów na funkcje podwojonego kąta

$$\left|\begin{array}{c} \sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \\ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \\ \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x\end{array}\right|$$

PRZ. $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^2 x dx$

II. $\displaystyle\int \sin ax \cos bx dx = \frac{1}{2}\int [\sin(a+b)x + \sin(a-b)x]dx$

$\displaystyle\int \sin ax \sin bx dx = \frac{1}{2}\int [\cos(b-a)x - \cos(b+a)x]dx$

$\displaystyle\int \cos ax \cos bx dx = \frac{1}{2}\int [\cos(b-a)x + \cos(b+a)x]dx$

III. $$\int R(\sin^2 x, \cos^2 x, \sin x \cos x)dx = \left|\begin{array}{c} t = \operatorname{tg} x \\ x = \operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{1}{1+t^2}dt \\ \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+1} = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2} \\ \cos^2 x = \frac{cos^2 x}{\sin^2 x+\cos^2 x} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x+1} = \frac{1}{1+t^2} \\ \sin x \cos x = \frac{t}{1+t^2}\end{array}\right|$$

PRZ. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x}$

IV. $\displaystyle\int R(\sin x, \cos x)dx = \left|\begin{array}{c} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \\ x = 2\operatorname{arctg} t \\ dx = \frac{2}{1+t^2}dt \\ \sin x = \sin(2\cdot\frac{x}{2}) = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}+1} = \frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \dfrac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array}\right|$

PRZ. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin x}$

CAŁKA RIEMANNA

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, ograniczona

Tworzymy ciąg podziałów $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ przedziału $[a,b]$:

$P_n: a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_i<\ldots<x_n=b$

$x_0,\ldots,x_n$ - punkty podziału

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i=1,\ldots,n$

$\delta_n = \max\{x_i - x_{i-1}:\ i=1,\ldots,n\}$- średnica podziału P_n

Ciąg podziałów $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nazywamy **normalnym** $\overset{df}{\Leftrightarrow} \lim\limits_{n\to\infty}\delta_n = 0$

Niech P_n będzie podziałem przedziału $[a,b]$.

W każdym z przedziałów $[x_{i-1},x_i]$ wybieramy punkt pośredni c_i: $\forall i=1,\ldots,n \quad c_i\in[x_{i-1},x_i]$.

Niech $S_n \overset{df}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$ - suma całkowa dla podziału P_n przy ustalonym wyborze punktów pośrednich c_i.

$(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ - ciąg sum całkowych dla ciągu podziałów $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

DEF. Jeśli dla każdego normalnego ciągu podziałów przedziału $[a,b]$ i dowolnego wyboru punktów pośrednich c_i istnieje $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, która nie zależy ani od wyboru ciągu podziałów, ani od wyboru punktów pośrednich, to granicę tę nazywamy całką Riemanna funkcji f na przedziale $[a,b]$.

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty\\(\delta_n\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$$

Przyjmujemy, że $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

PRZ. Oblicz całkę Riemanna funkcji stałej $f(x)=K$ na $[a,b]$.

TW. Funkcja ciągła na przedziale domkniętym i ograniczonym $[a,b]$ jest całkowalna w sensie Riemanna.

TW. (interpretacja geometryczna całki Riemanna)

Zał: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, ciągła

$\forall\in[a,b] \quad f(x)\geqslant 0$

Teza: pole obszaru $D=\{(x,y): x\in[a,b]\wedge 0\leqslant y\leqslant f(x)\}$ jest równe $\int\limits_a^b f(x)dx$.

PRZ. Pokaż, że funkcja Dirichleta nie jest całkowalna w sensie Riemanna na $[0,1]$.

$$D(x)=\begin{cases}0, & x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}\\ 1, & x\in\mathbb{Q}\cap[0,1]\end{cases}$$

DEF. $A\subset\mathbb{R}$

A jest "zbiorem miary Riemanna równej 0"$\Leftrightarrow$

$\forall\varepsilon>0\ \exists[a_i,b_i], i\in\{1,\ldots,n\} \quad A\subset\bigcup\limits_{i=1}^{n}[a_i,b_i]\wedge\sum\limits_{i=1}^{n}(b_i-a_i)\leqslant\varepsilon.$

PRZ. Pokaż, że zbiór złożony z jednego elementu czyli $\{x_0\}$, gdzie $x_0\in\mathbb{R}$, jest "zbiorem miary Riemanna równej 0".

Spostrzeżenie Każdy zbiór skończony $X\subset\mathbb{R}$ jest "zbiorem miary Riemanna równej 0".

PRZ. Ćw. dom.

Pokaż, że zbiór $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, jest "zbiorem miary Riemanna równej 0".

TW. Zał: f jest całkowalna w sensie Riemanna na $[a,b]$,

$\{x \in [a,b] : \ f(x) \neq g(x)\}$ jest "zbiorem miary Riemanna równej 0"

Teza: g jest całkowalna na $[a,b]$ oraz $\int\limits_a^b g(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx.$

PRZ. Fukcja nieciągła, która jest całkowalna w sensie Riemanna.

TW.

Zał: f całkowalna na $[a,b]$

$c \in [a,b]$

Teza: $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$

PRZ. Fukcja nieciągła sklejana, która jest całkowalna w sensie Riemanna.

TW. (własności funkcji całkowalnych w sensie Riemanna)

Zał: f,g całkowalne na $[a,b]$

Teza:

1) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha \cdot f + \beta \cdot g$ jest całkowalna na $[a,b]$

   oraz $\int\limits_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \alpha \int\limits_a^b f(x)dx + \beta \int\limits_a^b g(x)dx$

2) $f \cdot g$ jest całkowalna na $[a,b]$

3) $|f|$ jest całkowalna na $[a,b]$ i $\left| \int\limits_a^b f(x)dx \right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|dx$

4) $\forall x \in [a,b] \quad f(x) \geqslant 0 \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \geqslant 0$

5) $\forall x \in [a,b] \quad f(x) \geqslant g(x) \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx \geqslant \int\limits_a^b g(x)dx$

TW. (I tw. o wartości średniej)

Zał: f całkowalna na $[a,b]$

$\exists M, m \in \mathbb{R} \quad \forall x \in [a,b] \quad m \leqslant f(x) \leqslant M$

Teza: $m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$

Dowód:

Wystarczy przyjąć, że $g_1(x) = m, \ g_2(x) = M \quad \forall x \in [a,b]$ i zastosować poprzednie twierdzenie.

$g_1(x) \leqslant f(x) \Rightarrow \int\limits_a^b g_1(x)dx \leqslant \int\limits_a^b f(x)dx$

$$\int_a^b g_1(x)dx = \int_a^b m dx = m(b-a)$$

$$\Rightarrow m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx.$$

Analogicznie dowodzimy, że $\int\limits_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$.

DEF. Wartością średnią funkcji całkowalnej f na $[a,b]$ nazywamy liczbę $f_{\text{śr}} = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$.

TW. (II tw. o wartości średniej)

Zał: $f \in C([a,b])$

Teza: $\exists c \in [a,b] \quad f(c) = f_{\text{śr}} \quad (= \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx)$

Dowód: f osiąga swoje kresy, bo f ciągła na $[a,b]$ (z tw. Weierstrassa)

$$\left.\begin{array}{l} \exists x_1 \in [a,b] \quad f(x_1) = m = \inf\{f(x),\ x \in [a,b]\} \\ \exists x_2 \in [a,b] \quad f(x_2) = M = \sup\{f(x),\ x \in [a,b]\} \end{array}\right\} \Rightarrow \forall x \in [a,b] m \leqslant f(x) \leqslant M$$

$$\xRightarrow{\text{Tw I}} f(x_1)(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant f(x_2)(b-a)$$

$$f(x_1) \leqslant \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} \leqslant f(x_2)$$

Z własności Darboux $\Rightarrow \forall y \in [f(x_1), f(x_2)]\ \exists c \in [a,b]\ f(c) = y$

$$y = \int_a^b f(x)dx \in [f(x_1), f(x_2)]$$

$$\Rightarrow \exists c \in [a,b] \quad f(c) = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}.$$

DEF. f całkowalna $[a,b]$

Funkcją górnej granicy całkowania nazywamy funkcję $\phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$

TW. (o ciągłości funkcji górnej granicy całkowania)

Zał: f całkowalna na $[a,b]$

Teza: funkcja $\phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ jest ciągła na $[a,b]$.

Dowód: $x_0 \in [a,b]$

ϕ ciągła w $x_0 \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0} \phi(x_0+h) = \phi(x_0) \Leftrightarrow \lim\limits_{h\to 0}[\phi(x_0+h) - \phi(x_0)] = 0$

$$\phi(x_0+h)-\phi(x_0)=\int\limits_a^{x_0+h} f(x)dx-\int\limits_a^{x_0} f(x)dx=\int\limits_a^{x_0} f(x)dx+\int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx-\int\limits_a^{x_0} f(x)dx=\int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx$$

$$\left|\int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx\right|\leqslant\int\limits_{x_0}^{x_0+h} |f(x)|dx\leqslant M(x_0+h-x_0)=M\cdot h$$

$$\lim_{h\to 0}|\phi(x_0+h)-\phi(x_0)|\leqslant\lim_{h\to 0}M\cdot h=0$$

TW. (o różniczkowalności funkcji górnej granicy całkowania)
Zał: f całkowalna na $[a,b]$
f jest ciągła w otoczeniu $x_0\in[a,b]$
Teza: funkcja $\phi(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ jest różniczkowalna w x_0 oraz $\phi'(x_0)=f(x_0)$.

Dowód: $\dfrac{\phi(x_0+h)-\phi(x_0)}{h}=\dfrac{\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx}{h}\overset{\text{Tw. II o w. średniej}}{=}(*)$

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+h} f(x)dx=(x_0+h-x_0)\cdot f(c),\ c\in[x_0,x_0+h]$$

$c=(x_0+\theta h),\ \theta\in[0,1]$

$(*)=\frac{f(c)\cdot h}{h}=f(c)=f(x_0+\theta h)$

$$\phi'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{\phi(x_0+h)-\phi(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0}f(x_0+\theta h)=f(x_0)$$

Uwaga. Jeśli zdefiniujemy funkcję $\phi(x)=\int\limits_c^x f(x)dx$, gdzie c jest dowolnym punktem należącym do $[a,b]$, to twierdzenia poprzednie są prawdziwe dla ϕ.

TW. (Newtona - Leibniza)
Zał: f ciągła na $[a,b]$ (domkniętym i ograniczonym)
F pierwotna do f na $[a,b]$
Teza:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

(Całka Riemanna na $[a,b]$ = całka Newtona)

Dowód: Z poprzedniego twierdzenia, $\phi(x)=\int\limits_a^x f(x)dx$ jest funkcją pierwotną do f na $[a,b]$.

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\phi(b)=\phi(b)-\int\limits_a^a f(x)dx=\phi(b)-\phi(a)=F(b)-F(a),\text{ bo}$$

$\phi(x)=F(x)+C$

$\phi(b)-\phi(a)=F(b)+C-(F(a)+C)=F(b)-F(a).$

PRZ.

1) $\int_0^1 x^2 dx$

2) $\int_0^2 f(x)dx,\ f(x) = \begin{cases} x+1,\ x \in [-1,0) \\ 2-x,\ x \in [0,2] \end{cases}$

3) $\int_0^\pi f(x)dx,\ f(x) = \begin{cases} \sin x,\ x \in [0,\pi] \setminus \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \\ \frac{\sin x}{x}, x \in \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \end{cases}$

PRZ. Oblicz $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \ldots + \frac{1}{n+n}$.

CAŁKI NIEWŁAŚCIWE

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$, ciągła $\xRightarrow{Tw.N-L} \int_a^b f(x)dx = \phi(b) - \phi(a)$

I.

1) f jest ciągła w w $[a,b)$ (f nie jest ciągła b lub f nie jest określona w b)
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\beta\to b^-} \int_a^\beta f(x)dx$$
Jeśli istnieje ta granica, to tę granicę nazywamy całką niewłaściwą na $[a,b]$ i mówimy, że ta całka jest zbieżna (w przeciwnym razie mówimy, że jest rozbieżna).

PRZ. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

2) f jest ciągła w $(a,b]$ (f nie jest ciągła a lub f nie jest określona w a)
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha\to a^+} \int_\alpha^b f(x)dx$$

PRZ. $\int_0^1 \frac{1}{x}dx$

3) f jest ciągła w (a,b) (f nie jest ciągła lub nieokreślona w punktach a i b)
$x_0 \in (a,b)$
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha\to a^+} \int_\alpha^{x_0} f(x)dx + \lim_{\beta\to b^-} \int_{x_0}^\beta f(x)dx$$

II.

1) $f \in C([a,+\infty))$
$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\beta\to\infty} \int_a^\beta f(x)dx$$

PRZ. Zbadać zbieżność $\int\limits_0^{+\infty} \sin x dx$.

2) $f \in C((-\infty, b])$

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{\alpha \to -\infty} \int\limits_{\alpha}^{b} f(x)dx$$

3) $f \in C((-\infty, +\infty))$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)dx$$

PRZ. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$

TW. (o zbieżności całek)

Zał: $\forall x \in [a,b) \quad 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$

f, g ciągłe $[a,b)$

Teza: $\int\limits_{[a,b)} g(x)dx$ zbieżna $\Rightarrow \int\limits_{[a,b)} f(x)dx$ zbieżna

PRZ. Zbadać zbieżność $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+x^2+1} dx$.

PRZ. Znaleźć funkcję pierwotną funkcji $f(x)$.

$$f(x) \begin{cases} 0, \ x < 0 \\ x, \ x \in [0,1] \\ x^2, \ x > 1 \end{cases}$$

TW. (całkowanie przez części dla całek oznaczonych)

Zał: $u, v \in C^1([a,b])$

Teza: $\int\limits_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int\limits_a^b u'(x)v(x)dx$

TW. (całkowanie przez podstawienie dla całek oznaczonych)

Zał: $f \in C([a,b])$

$\varphi: \ [\alpha, \beta] \to [a,b]$, φ - bijekcja, $\varphi \in C^1([\alpha,\beta])$

$\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$

Teza: $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

PRZ. Oblicz $\int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2} dx, \ a > 0$

ZASTOSOWANIA GEOMETRYCZNE CAŁEK

Pole obszaru

TW. $D = \{(x,y):\ x \in [a,b],\ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x)\}$

φ, ψ - ciągłe w $[a,b]$ $(\forall x \in [a,b]\ \varphi(x) \leqslant \psi(x))$

Teza: $|D| = \int\limits_a^b (\psi(x) - \varphi(x))dx$

Współrzędne biegunowe

r - promień wodzący
φ - kąt (biegunowy) skierowany
$\frac{x}{r} = \cos\varphi$
$\frac{y}{r} = \sin\varphi$

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}$$

(r,φ) - współrzędne biegunowe punktu
$r \in [0,+\infty)$ $(r \geqslant 0!)$
$\varphi \in \mathbb{R}$

PRZ.

Narysować spiralę Archimedesa daną wzorem $r = \varphi$.

PRZ. Narysować lemniskatę Bernoulliego $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2),\ a > 0$.

Obliczyć pole obszaru $D = \{(x,y) \in \mathbb{R} : x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi,\ 0 \leqslant r \leqslant r(\varphi),\ \varphi \in [\alpha,\beta]\}$.

TW. Zał: $r(\varphi)$ ciągła w $[\alpha,\beta]$

$r(\varphi) \geqslant 0$

Teza: $|D| = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta r^2(\varphi)d\varphi$.

PRZ. Obliczyć pole ograniczne lemniskatą Bernoulliego $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$.

$$\tfrac{1}{4}|P| = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}a^2\cos 2\varphi d\varphi = \left[\frac{1}{4}a^2\sin 2\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}a^2(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0) = \frac{1}{4}a^2(1-0) = \frac{1}{4}a^2$$

$|P| = a^2$

Krzywa zadana parametrycznie

$x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [\alpha,\beta]$

PRZ. Okrąg zadany parametrycznie.

TW. (pole obszaru ograniczonego krzywą zadaną parametrycznie)

Zał: $L: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},\ t \in [\alpha,\beta]$

$\forall t \in [\alpha,\beta] \quad \psi(t) \geqslant 0$
$\forall t \in [\alpha,\beta] \quad \varphi'(t) > 0$
$\varphi \in C^1([\alpha,\beta])$

$\psi \in C([\alpha,\beta])$
$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ \varphi(\alpha) \leqslant x \leqslant \varphi(\beta),\ 0 \leqslant y \leqslant \psi(t),\ t \in [\alpha,\beta]\}$
Teza: $|D| = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \cdot \varphi'(t)dt$

Dowód:

$$L : \begin{cases} x = \varphi(t) & t = \varphi^{-1}(x) \\ y = \psi(t) & y = \psi(\varphi^{-1}(x)) \end{cases}$$

$$|D| = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} y(x)dx = \int\limits_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} \psi(\varphi^{-1}(x))dx = \begin{vmatrix} t = \varphi^{-1}(x) \\ x = \varphi(t) \\ dx = \varphi'(t)dt \end{vmatrix} \overset{\text{Tw. o podst.}}{=} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \cdot \varphi'(t)dt. \blacksquare$$

Inaczej: $|D| = \int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t) \cdot x'(t)dt$

PRZ.
Obliczyć pole obszaru ograniczonego elipsą $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

PRZ.
Obliczyć pole obszaru ograniczonego cykloidą
$x = a(t - \sin t)$
$y = a(1 - \cos t)$
$t \in [0, 2\pi]$

Długość krzywej

$$L: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [\alpha,\beta]$$

Tworzymy ciąg podziałów przedziału $[\alpha,\beta]$
$\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = \beta$
$\delta_n = \max\{|t_i - t_{i-1}|,\ i = 1,\ldots,n\}$
$P_{i-1} = (x(t_{i-1}), y(t_{i-1}))$
$P_i = (x(t_i), y(t_i))$
$|P_{i-1}P_i| = \sqrt{(x(t_i) - x(t_{i-1}))^2 + (y(t_i) - y(t_{i-1}))^2}$
$d_n = \sum\limits_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i|$

DEF. Jeśli istnieje $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ (\delta_n \to 0)}} d_n$, to krzywą nazywamy **prostowalną** i tę granicę nazywamy **długością** krzywej.

DEF. Krzywą L nazywamy **łukiem gładkim** $\Leftrightarrow$

1) $x(t), y(t) \in C^1([\alpha,\beta])$

2) $\forall t \in [\alpha,\beta]\ ((x'(t))^2 + (y'(t))^2 > 0)$($\Leftrightarrow$ w każdym punkcie krzywej istnieje styczna)

TW. Każdy łuk gładki jest krzywą prostowalną i jego długość

$$|L| = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

Uwaga. Długość łuku gładkiego w przestrzeni $\mathbb{R}^n$

$x_1 = x_1(t) \quad t \in [\alpha, \beta]$

$x_2 = x_2(t)$

$\vdots$

$x_n = x_n(t)$

$x_1, \ldots, x_n \in C^1([\alpha, \beta])$

$\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i'(t))^2 > 0 \; \forall t \in [\alpha, \beta]$

Wtedy $|L| = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i'(t))^2} dt.$

WN. Krzywa zadana w sposób jawny

$L: \; y = f(x), \; x \in [a, b]$

$f \in C^1([a, b])$

Wtedy $|L| = \int\limits_{a}^{b} \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$

Dowód:

$x = t$

$y = y(t)$

$t \in [a, b]$

$|L| = \int\limits_{a}^{b} \sqrt{1^2 + (y'(t))^2} dt.$

TW. (długość krzywej zadanej równaniem biegunowym)

Zał: $L: \; r = r(\varphi), \; \varphi \in [\alpha, \beta]$

$r(\varphi) \in C^1([\alpha, \beta])$

Teza: $|L| = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi.$

Dowód:

$x = r \cos \varphi \quad x(\varphi) = r(\varphi) \cdot \cos \varphi$

$y = r \sin \varphi \quad y(\varphi) = r(\varphi) \cdot \sin \varphi$

$|L| = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2} d\varphi$

$x'(\varphi) = r'(\varphi) \cos \varphi + r(\varphi)(-\sin \varphi)$

$y'(\varphi) = r'(\varphi) \sin \varphi + r(\varphi) \cdot \cos \varphi$

$(x'(\varphi))^2 + (y'(\varphi))^2 =$

$= (r'(\varphi))^2 \cos^2 \varphi - 2r'(\varphi) \cdot r(\varphi) \cos \varphi \sin \varphi + r^2(\varphi) \sin^2 \varphi +$

$+ (r'(\varphi))^2 \sin^2 \varphi + 2r'(\varphi) r(\varphi) \sin \varphi \cos \varphi + r^2(\varphi) \cos^2 \varphi =$

$= (r'(\varphi))^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + r^2(\varphi)(\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) =$

$= (r'(\varphi))^2 + (r(\varphi))^2$

$|L| = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'(\varphi))^2} d\varphi$

Podsumowanie:

$$|L| = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx, \quad y = f(x),\ x \in [a,b]$$

$$|L| = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt, \quad t \in [\alpha,\beta],\ x = x(t),\ y = y(t)$$

$$|L| = \int_\alpha^\beta \sqrt{(r(\varphi))^2+(r'(\varphi))^2}d\varphi, \quad \varphi \in [\alpha,\beta],\ r = r(\varphi)$$

PRZ. Obliczyć długość cykloidy

$x = a(t-\sin t)$
$y = a(1-\cos t)$
$t \in [0,2\pi]$

PRZ. Obliczyć długość asteroidy

$x = a\cos^3 t$
$y = a\sin^3 t$
$t \in [0,2\pi]$

PRZ. Obliczyć długość kardioidy

$r = a(1+\cos\varphi)$

Objętość bryły obrotowej

$y = f(x),\ x \in [a,b]$
$f \in C([a,b])$
V - bryła powstała przez obrót krzywej $y = f(x)$ wokół osi OX.

Wtedy: objętość bryły $|V| = \pi \int_a^b f^2(x)dx$

Dowód:

$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ - podział
$c_i \in [x_{i-1},x_i] \quad \Delta V_i = \pi \cdot f^2(c_i)\cdot \Delta x_i$

$$V_n = \sum_{i-1}^{n} \pi f^2(c_i)\cdot\Delta x_i = \pi\sum_{i=1}^{n} f^2(c_i)\Delta x_i$$

$$V = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (\delta_n\to 0)}} \pi\sum_{i=1}^n f^2(c_i)\Delta x_i = \pi\cdot\int_a^b f^2(x)dx.$$

Jeśli krzywa jest zadana parametrycznie:

$x = x(t)$
$y = y(t), \quad t \in [\alpha,\beta]$
$y(t) \in C([\alpha,\beta])$
$x(t) \in C^1([\alpha,\beta])$
$\forall t \in [\alpha,\beta]\ x'(t) > 0$

Wtedy $|V| = \pi\int_\alpha^\beta y^2(t)\cdot x'(t)dt.$

PRZ.

Obliczyć objętość bryły powstałej przez obrót elipsy $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1$.
Obliczyć objętość torusa $x^2+(y-R)^2 = r^2$.

TW. (pole powierzchni bocznej bryły obrotowej)

Zał:

$y = f(x),\ x \in [a,b]$

$f \in C^1([a,b])$

$\forall x \in [a,b]\ f(x) \geqslant 0$

Teza: pole powierzchni bocznej bryły powstałej przez obrót krzywej wokół osi OX

$$|S| = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx$$

PRZ. Obliczyć pole powierzchni torusa $x^2+(y-R)^2 = r^2$.

Jeśli krzywa jest łukiem gładkim:

$x = x(t)$

$y = y(t), \quad t \in [\alpha,\beta]$

$x(t), y(t) \in C^1([\alpha,\beta])$

$\forall t \in [\alpha,\beta] \quad y(t) \geqslant 0$

Teza: pole powierzchni bocznej bryły powstałej przez obrót krzywej wokół osi OX

$|S| = 2\pi \int\limits_\alpha^\beta y(t)\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$. PRZESTRZENIE METRYCZNE

DEF. zbiór $X \neq \varnothing$

Metryką w zbiorze X nazywamy dowolną funkcję $d : X \times X \to \mathbb{R}$ taką, że:

1) $\forall x,y \in X \quad d(x,y) \geqslant 0$

2) $\forall x,y \in X \quad d(x,y) = d(y,x)$ (symetria)

3) $\forall x,y,z \in X \quad d(x,z) \leqslant d(x,y)+d(y,z)$ (warunek trójkąta)

4) $\forall x,y \in X \quad d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

Parę (X,d) nazywamy **przestrzenią metryczną**.

PRZ. $X = \mathbb{R},\ x,y \in \mathbb{R}$

$d(x,y) = |y-x|$

Dowód: $d(x,z) = |z-x| = |z-y+y-x| \leqslant |z-y|+|y-x| = d(y,z)+d(x,y)$

$(\mathbb{R}, |\cdot|)$ - przestrzeń metryczna

PRZ. $X = \mathbb{R}^2,\ = (x_1,y_1),(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$

$d_e((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ - metryka euklidesowa

$d_t((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = |x_2-x_1|+|y_2-y_1|$ - metryka taksówkowa

$d_m((x_1,y_1),(x_2,y_2)) = \max\{|x_2-x_1|,|y_2-y_1|\}$ - metryka maksimum

PRZ. $X = \mathbb{R}^n,\ x = (x_1,\ldots,x_n),\ y = (y_1,\ldots,y_n)$

$d_e(x,y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^n (y_i-x_i)^2}$

$d_t(x,y) = \sum\limits_{i=1}^n |y_i-x_i|$

$d_m(x,y) = \max\{|y_i-x_i| :\ i = 1,\ldots,n\}$

PRZ. $X \neq \varnothing,\ x,y \in X$

$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$ - metryka dyskretna

PRZ. $X = \{a_1a_2\dots a_n:\ a_i \in A, i = 1,\dots,n\}$ - zbiór słów długości n

$a_1a_2\dots a_n$ - słowo

A - alfabet

$d((a_1a_2\dots a_n),(b_1\dots b_n)) = |\{i \in \{1,\dots,n\}:\ a_i \neq b_i\}|$ - odległość Hamminga

PRZ. Metryka rzeka, metryka kolejowa.

DEF. (X,d) - przestrzeń metryczna

$x_0 \in X,\ r > 0$

Kulą o środku x_0 i promieniu r nazywamy $K(x_0,r) = \{x \in X:\ d(x_0,x) < r\}$.

PRZ. $(\mathbb{R},|\cdot|)$

$x_0 \in \mathbb{R},\ r > 0$

$K(x_0,r) = \{x \in \mathbb{R}:\ |x - x_0| < r\} = (x_0 - r, x_0 + r)$

$-r < x - x_0 < r \;/ + x_0$

$x_0 - r < x < x_0 + r$

PRZ. $(\mathbb{R}^2,d_e)$

$K((x_0,y_0),r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2:\ d((x_0,y_0),(x,y)) < r\} =$

$= \{(x,y):\ \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < r\} = \{(x,y):\ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 < r^2\}.$

PRZ. $(\mathbb{R}^2,d_m)$

$K((0,0),r) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2:\ d((0,0),(x,y)) < r\} =$

$= \{(x,y):\ \max\{|x|,|y|\} < r\}.$

DEF. (X,d) - przestrzeń metryczna

Zbiór $A \subset X$ nazywamy **ograniczonym** $\Leftrightarrow \exists x_0 \in X\ \exists r > 0 \quad A \subset K(x_0,r)$.

PRZ. $(\mathbb{R},|\cdot|)$

$A = (a,b)$ jest ograniczony, bo $K(\frac{a+b}{2},\frac{b-a}{2}) \supset A$.

PRZ. $(X,d_d$ - dyskretna$)$

Każdy zbiór A w przestrzeni metrycznej z metryką dyskretną jest ograniczony, bo $K(x_0,2) \supset A$, gdzie x_0 jest dowolnym punktem należącym do X.

DEF.

I - dowolny zbiór indeksów

$\forall i \in I \quad A_i$ - zbiór, (rodzina zbiorów)

$\bigcup_{i\in I} A_i \overset{df}{=} \{x:\ \exists i \in I \quad x \in A_i\}$ - suma zbiorów

$\bigcap_{i\in I} A_i \overset{df}{=} \{x:\ \forall i \in I \quad x \in A_i\}$ - wspólna część zbiorów

DEF. (topologii w zbiorze)

$X \neq \varnothing$

Topologię τ w zbiorze X nazywamy dowolną rodzinę zbiorów $A \subset X$ spełniającą warunki:

1) $\varnothing \in \tau,\ X \in \tau$

2) $\forall i \in I\ A_i \in \tau \Rightarrow \bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \tau$

3) $\forall i = 1, \dots, n\ A_i \in \tau \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \tau$
Zbiory należące do τ nazywamy zbiorami **otwartymi**.

DEF. (X,d) - przestrzeń metryczna
Zbiór $U \subset X$ nazywamy otwartym w $(X,d) \overset{df}{\Leftrightarrow} U = \varnothing$ lub $\forall x \in X\ \exists r > 0\ K(x,r) \subset U$

Spostrzeżenie $x_0 \in X,\ r > 0$
Kula $K(x_0, r)$ jest zbiorem otwartym w (X,d).

Spostrzeżenie $(\mathbb{R}, |\cdot|)$
Każdy przedział (a,b) jest zbiorem otwartym (bo $(a,b) = K(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2})$)

TW. (X,d) - przestrzeń metryczna
$\tau_d = \{U \subset X :\ U$ - otwarty w $(X,d)\}$ jest topologią na zbiorze X (nazywaną **topologią indukowaną przez metrykę** d).

Dowód:

1) $\varnothing \in \tau_d$ (z definicji zbioru otwartego w p. metrycznej))
$X \in \tau_d$, bo każda kula $K(x,r) = \{x \in X : \dots\} \subset X$.

2) $\forall i \in I\ A_i \in \tau_d \Rightarrow \bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \tau_d$?
$\bigcup\limits_{i\in I} A_i \in \tau_d \Leftrightarrow \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ jest otwartym zbiorem w X
$\overset{df}{\Leftrightarrow} \forall x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i\ \exists r > 0 \quad K(x,r) \subset \bigcup\limits_{i\in I} A_i$
Weźmy dowolny $x \in \bigcup\limits_{i\in I} A_i \Leftrightarrow \exists i_0 \in I\ x \in A_{i_0}$ - zbiór otwarty
$\Rightarrow \exists r_0 > 0\ K(x, r_0) \subset A_{i_0} \subset \bigcup\limits_{i\in I} A_i$.

3) $\forall i = 1, \dots, n\ A_i \in \tau_d \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \in \tau_d$
Mamy pokazać, że $\forall x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i\ \exists r > 0\ K(x,r) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$
Niech $x \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, n\ x \in A_i \Leftrightarrow$
$\forall i = 1, \dots, n\ \exists r_i > 0\ K(x, r_i) \subset A_i$.
Niech $r = \min\{r_1, \dots, r_n\}$. Wtedy $K(x,r) \subset \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$.

PRZ. Czy przecięcie dowolnej liczby zbiorów otwartych musi być otwarte?
$(\mathbb{R}, |\cdot|)$
$\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}) = [0,1]$ - nie jest otwarty
$\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = \{0\}$ - nie jest otwarty

Spostrzeżenie (X,d) - przestrzeń metryczna, τ - topologia na X
$A \subset X$
Wtedy $\tau_A = \{A \cap U :\ U \in \tau\}$ jest topologią na zbiorze A (zwaną **topologią indukowaną przez** τ **na zbiorze** A).

DEF. (X, τ) - przestrzeń topologiczna $A \subset X$

Wnętrzem zbioru A nazywamy największy (ze względu na zawieranie, $\subset$) zbiór otwarty zawarty w A.
Ozn. **int** A - interior

PRZ. $(\mathbb{R}, |\cdot|)$
$A = [0,1)$
$\operatorname{int} A = (0,1)$.

DEF. $x_0 \in X$

Otoczeniem punktu $x_0 \in X$ nazywamy dowolny zbiór otwarty zawierający punkt x_0.
Ozn. **ot**(x_0)- zbiór wszystkich otoczeń punktu x_0.

DEF. $B \subset X$,

Zbiór B nazywamy **domkniętym** $\Leftrightarrow$ $X \setminus B$ jest zbiorem otwartym.

PRZ.

$[a,b]$ - jest domknięty. $(\mathbb{R} \setminus [a,b] = \underset{otwarty}{(-\infty,a)} \cup \underset{otwarty}{(b,+\infty)})$
$(-\infty,b]$ - jest domknięty

TW. (własności zbiorów domkniętych)

1) $\varnothing, X$ - zbiory domknięte
2) $\forall i \in I \; B_i$ - domknięty $\Rightarrow \bigcap\limits_{i \in I} B_i$ - domknięty
3) $\forall i = 1, \ldots, n \; B_i$ - domknięty $\Rightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i$ - domknięty

PRZ. $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} [\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}] = (0,2)$ - otwarty

DEF.

Domknięciem zbioru $A \subset X$ nazywamy najmniejszy zbiór domknięty zawierający zbiór A.
Ozn. $\bar{A}$

PRZ. $\overline{(0,1]} = [0,1]$

DEF. Punkt $x_0 \in X$ nazywamy punktem **brzegowym** zbioru $A \subset X \Leftrightarrow$
$\forall r > 0 \quad K(x_0,r) \cap A \neq \varnothing \wedge K(x_0,r) \cap (X \setminus A) \neq \varnothing$.
Brzegiem zbioru A nazywamy zbiór wszystkich punktów brzegowych zbioru A.
Ozn. ∂A.

PRZ. $\partial(0,1] = \{0,1\}$

DEF. Punkt $x_0 \in X$ nazywamy punktem **skupienia** zbioru $A \subset X \;\Leftrightarrow$
$\forall r > 0 \; (K(x_0,r) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \varnothing$.

PRZ.

$A = \{x_0\}$ - brak punktów skupienia
$A = \{\frac{1}{n} : \; n \in \mathbb{N}\}$, 0 jest punktem skupienia
$A = (0,1]$, $[0,1]$- zbiór punktów skupienia

TW. A jest zbiorem domkniętym $\Leftrightarrow$ gdy A zawiera wszystkie swoje punkty skupienia.

DEF. (granicy ciągu)
(X,d) - przestrzeń metryczna
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, $g \in X$
$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} d(a_n,g) = 0$
$(\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geqslant n_0\ d(a_n,g) < \varepsilon)$

PRZ. $(\mathbb{R}^2, d_e)$
$a_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$, $g = (0,0)$
$\lim\limits_{n\to\infty} d(a_n,g) = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{(\frac{1}{n}-0)^2 + (\frac{1}{n}-0)^2} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{n} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = (0,0)$

DEF. (równoważności metryk)
$(X,d_1), (X,d_2)$ - przestrzenie metryczne
Metryki d_1 i d_2 nazywamy **równoważnymi** na $X \overset{df}{\Leftrightarrow}$
$\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X \quad (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżny w $(X,d_1) \Leftrightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zbieżny w (X,d_2).

PRZ. $X = \mathbb{R}$, $x_n = \frac{1}{n}$
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest zbieżny w $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ale nie jest zbieżny w $(\mathbb{R}, d_d)$.

DEF. (jednostajnej równoważności metryk)
Metryki d_1 i d_2 nazywamy **jednostajnie równoważnymi** na $X \overset{df}{\Leftrightarrow} \exists m > 0\ \exists M > 0\ \forall x,y \in X$
$d_1(x,y) \leqslant M d_2(x,y)$ i $d_2(x,y) \leqslant m d_1(x,y)$.

TW. Jeśli d_1 i d_2 są jednostajnie równoważne na X, to d_1 i d_2 są równoważne na X.

TW. Metryki: euklidesowa, taksówkowa i maksimum są jednostajnie równoważne (i równoważne) na $\mathbb{R}^n$.

PRZ. Pokazać jednostajną równoważność metryk d_e i d_t w $\mathbb{R}^2$.

DEF. (punktu skupienia)
$A \subset X$
Punkt $x_0 \in X$ nazywamy punktem skupienia zbioru $A \overset{df}{\Leftrightarrow} \exists (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A \setminus \{x_0\} \quad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

DEF. (ciągu Cauchy'ego)
Ciąg $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jest ciągiem Cauchy'ego w (X,d)
$\overset{df}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n,m \geqslant n_0 \quad d(a_n,a_m) < \varepsilon$.

TW. Każdy ciąg zbieżny w (X,d) jest ciągiem Cauchy'ego w (X,d).

Dowód: $0 \leqslant d(a_n,a_m) \leqslant d(a_n,g) + d(a_m,g) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

PRZ. $X = (0,1]$.
Ciąg $a_n = \frac{1}{n}$ jest ciągiem Cauchy'ego w $(X, |\cdot|)$ ale nie jest zbieżny w tej przestrzeni.

DEF. Przestrzeń metryczną (X,d) nazywamy **zupełną** $\overset{df}{\Leftrightarrow}$ każdy ciąg Cauchy'ego elementów w tej przestrzeni jest zbieżny (do granicy należącej do tej przestrzeni).

PRZ. 1) $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ - przestrzeń zupełna

2) $(\mathbb{R}^n, d)$, $d \in \{d_e, d_t, d_m\}$ - przestrzeń zupełna

DEF. (zbioru zwartego)
(X, d) - przestrzeń metryczna
Zbiór $A \subset X$ nazywamy **zwartym** $\Leftrightarrow \forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A \; \exists (a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \; \lim_{k\to\infty} a_{n_k} = g \in A$
(gdy z każdego ciągu elementów zbioru A można wybrać podciąg zbieżny do granicy należącej do A).

TW. $(\mathbb{R}^n, d)$, $d \in \{d_e, d_t, d_m\}$
Zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ jest zwarty $\Leftrightarrow$ A jest zbiorem domkniętym i ograniczonym.

ODWZOROWANIA CIĄGŁE

DEF. $f: X \to Y$
$A \subset X$
Obrazem zbioru$A$ poprzez odwzorowanie f nazywamy zbiór $f[A] = \{f(x) \in Y : \; x \in A\}$

DEF. $B \subset Y$
Przeciwobrazem zbioru B poprzez odwzorowanie f nazywamy zbiór
$f^{-1}[B] = \{x \in X : \; f(x) \in B\}$

PRZ. $f(x) = x^2$
$f[< -1, 2 >] = < 0, 4 >$
$f^{-1}[< 0, 4 >] = < -2, 2 >$

Ozn. $x_0 \in X$, τ_x - topologia na X
$\mathrm{ot}(x_0)$ - zbiór wszystkich otoczeń punktu x_0
τ_y - topologia na Y

DEF. (granicy funkcji)
$f: X \to Y$
$x_0 \in X, \; g \in Y$

1) Def. topologiczna (Cauchy'ego)
$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \overset{df}{\Leftrightarrow} \forall V \in \mathrm{ot}(g) \; \exists U \in \mathrm{ot}(x_0) \; f[U \setminus \{x_0\}] \subset V$

2) Def. Cauchy'ego (w przestrzeniach metrycznych)
$(X, d), (Y, \rho)$ - przestrzenie metryczne
$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in X \; 0 < d(x, x_0) < \delta \Rightarrow \rho(f(x), g) < \varepsilon.$
$\forall K(g, \varepsilon) \; \exists K(x_0, \delta) \; f[K(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}] \subset K(g, \varepsilon)$

3) Def. Heinego (w przestrzeniach metrycznych)
$\lim_{x\to x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X \setminus \{x_0\}$
$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_0) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \rho(f(x_n), g) = 0$
$(\lim_{n\to\infty} x_n \overset{(X,d)}{=} x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) \overset{(Y,\rho)}{=} g)$

DEF. (funkcji ciągłej)
$f: \underset{\tau_X}{X} \to \underset{\tau_Y}{Y},$

1) f jest ciągła w zbiorze $X \Leftrightarrow \forall V \in \tau_Y \; f^{-1}[V] \in \tau_X$
(tzn. przeciwobraz dowolnego zbioru otwartego w zbiorze Y jest zbiorem otwartym w zbiorze X)

2) f jest ciągła w $x_0 \in X \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

3) f jest ciągła w zbiorze $A \subset X \Leftrightarrow$ f jest ciągła w każdym punkcie $x_0 \in A$

DEF. $f: X \to Y$, $(X,d), (Y,\rho)$ - przestrzenie metryczne
Odwzorowanie f nazywamy **ograniczonym** $\Leftrightarrow$ $f[X]$ jest zbiorem ograniczonym (w przestrzeni (Y,ρ)).

TW. (o zwartości obrazu funkcji ciągłej na zbiorze zwartym)
Zał: $f: X \to Y$, $(X,d), (Y,\rho)$ - przestrzenie metryczne
X - zbiór zwarty
Teza: $f[X]$ jest zbiorem zwartym.

Dowód: Mamy pokazać, że $\forall (y_n) \subset f[X] \; \exists (y_{n_k}) \lim\limits_{k \to \infty} y_{n_k} = y_0$, gdzie $y_0 \in f[X]$.
Niech $(y_n) \subset f[X]$ będzie dowolnym ciągiem.
$\forall n \in \mathbb{N} \; \exists x_n \in X \; f(x_n) = y_n$
$(x_n) \subset X$, X - zwarty $\Rightarrow \exists (x_{n_k}) \lim\limits_{x \to \infty} x_{n_k} = x_0, \; x_0 \in X$
$y_{n_k} = f(x_{n_k})$
$\lim\limits_{k \to +\infty} y_{n_k} = \lim\limits_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) \overset{f \text{ ciągła}}{=} f(x_0) = y_0 \in f[X]$. $\square$

TW. (Weierstrassa o osiąganiu kresów)
Zał: (X,d) - przestrzeń metryczna, $(\mathbb{R}, |\cdot|)$
X - zwarty
$f: X \to \mathbb{R}$
Teza:
$\exists x_1 \in X \; f(x_1) = \sup f[X]$
$\exists x_2 \in X \; f(x_2) = \inf f[Y]$

Dowód: Twierdzenie jest wnioskiem z tw. poprzedniego.
$f[X] \subset \mathbb{R}$ - jest zwarty (a z odpowiedniego tw. oznacza to, że $f[X]$ jest zbiorem ograniczonym i domkniętym).

DEF. (X,d) - przestrzeń metryczna
X - nazywamy **niespójną** $\Leftrightarrow$ $\exists A_1, A_2 \overset{\text{otwarte}}{\in} \tau_d$ takie, że

1) $A_1 \cup A_2 = X$

2) $A_1 \cap A_2 = \varnothing$

3) $A_1 \neq \varnothing$, $A_2 \neq \varnothing$

DEF. X jest **spójna** $\Leftrightarrow$ X nie jest niespójna.

TW. (o przyjmowaniu wartości pośrednich)

Zał: (X,d) - przestrzeń metryczna spójna

$f: X \to \mathbb{R}$ ciągła

$x_1, x_2 \in X$ $f(x_1) < f(x_2)$

Teza: $\forall c \in (f(x_1), f(x_2))$ $\exists x_0 \in X$ $f(x_0) = c$

Dowód: (nie wprost)

Przypuśćmy, że $\exists c \in (f(x_1), f(x_2)) \forall x \in X$ $f(x) \neq c$

$X_1 = \{x \in X : f(x) < c\}$

$X_2 = \{x \in X : f(x) > c\}$

$X_1 = f^{-1}[(-\infty, c)] \in \tau_d$, bo f ciągła i $(-\infty, c)$ jest otwarty (w $\mathbb{R}$)

$X_2 = f^{-1}[(c, +\infty)] \in \tau_d$

$$\left.\begin{array}{l} X = X_1 \cup X_2 \\ X_1 \cap X_2 = \varnothing \\ X_1 \neq \varnothing \wedge X_2 \neq \varnothing \end{array}\right\} \Rightarrow X \text{ jest niespójna, sprzeczność z założeniem.}$$

TW. (o własności Darboux)

Zał: $f: A \to \mathbb{R}$ ciągła

A - odcinek (przedział) $\subset \mathbb{R}$

$x_1, x_2 \in A$ $f(x_1) < f(x_2)$

Teza: $\forall c \in (f(x_1), f(x_2))$ $\exists x_0 \in (x_1, x_2)$ $f(x_0) = c$

Dowód: Stosujemy poprzednie twierdzenie dla $X = [x_1, x_2]$, który jest spójny.

TW. (o spójności obrazu zbioru spójnego)

Zał: $f: X \to Y$, $(X,d), (Y,\rho)$ - przestrzenie metryczne

X - spójna

$f: X \to Y$ - ciągła

Teza: $f[X]$ jest spójny.

Dowód: (nie wprost)

$\underset{\text{otwarte w } Y}{Y_1, Y_2} \in \tau_\rho$

$Y_1 \cup Y_2 = f[X]$ (- jest niespójny)

$Y_1 \cap Y_2 = \varnothing$

$Y_1 \neq \varnothing, Y_2 \neq \varnothing$

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \overset{df}{=} f^{-1}[Y_1] \\ X_2 = f^{-1}[Y_2] \end{array}\right\} \text{ - otwarte} \in \tau_d, \text{ bo } Y_i \text{ - otwarte i } f \text{ ciągła}$$

$$\left.\begin{array}{l} X_i \neq \varnothing (\text{bo } Y_i \neq \varnothing) \\ Y_1 \cap Y_2 = \varnothing \Rightarrow X_1 \cap X_2 = \varnothing \\ Y_1 \cup Y_2 = f[X] \Rightarrow X_1 \cup X_2 = X \end{array}\right\} \Rightarrow X \text{ jest niespójna, sprzecznośćz założeniem.}$$

WN.

Zał: $f: A \to \mathbb{R}$ - ciągła

A - odcinek

Teza: $f[A]$ - odcinek

WN.

Zał: $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ - ciągła

Teza: $f[[a,b]] = [c,d]$.

PRZESTRZENIE UNORMOWANE
$(X, K, +, \cdot)$ - przestrzeń wektorowa, $K = \mathbb{R} \vee K = \mathbb{C}$

DEF. Funkcję $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}$ nazywamy **normą** w $X \overset{df}{\Leftrightarrow}$

1) $\forall x \in X \; ||x|| \geqslant 0$

2) $\forall \alpha \in K \; \forall x \in X \; ||\alpha \cdot x|| = |\alpha| \; ||x||$ - jednorodność normy

3) $\forall x, y \in X \; ||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y||$ - warunek trójkąta

4) $\forall x \in X \; ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$

Parę $(X, ||\cdot||)$ nazywamy przestrzenią unormowaną.

PRZ. $X = \mathbb{R}, \; ||x|| = |x|, \; K = \mathbb{R}$

PRZ. $X = \mathbb{R}^n, \; K = \mathbb{R}$
$x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$
$||x||_e = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$ - euklidesowa
$||x||_t = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|$ - taksówkowa
$||x||_m = \max\{|x_i| : \; i = 1, \ldots, n\}$ - maksimum

TW. (każda przestrzeń unormowana jest metryczna)
Zał: $(X, ||\cdot||)$ - przestrzeń unormowana
$x, y \in X \; d(x, y) \overset{df}{=} ||x - y||$ - metryka indukowana przez normę
Teza: (X, d) - przestrzeń metryczna

DEF. Przestrzeń unormowaną i zupełną nazywamy przestrzenią **Banacha**.

PRZ. $\mathbb{R}^n$ z normą euklidesową, taksówkową i maksimum jest przestrzenią Banacha.

PRZESTRZENIE UNITARNE

DEF. $(X, K, +, \cdot)$ - przestrzeń wektorowa, $K = \mathbb{R} \vee K = \mathbb{C}$
Funkcję $\circ : X \times X \to K$ nazywamy **iloczynem skalarnym** $\overset{df}{\Leftrightarrow}$

1) $\forall x \in X \; x \circ x \geqslant 0$

2) $\forall x, y \in X \; x \circ y = y \circ x$

3) $\forall x, y, z \in X \; (x + y) \circ z = x \circ z + y \circ z$

4) $\forall x, y \in X \; \forall \alpha \in K \; (\alpha x) \circ y = \alpha(x \circ y)$

5) $\forall x \in X \; x \circ x = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$

$(X, \circ)$ - przestrzeń unitarna.

PRZ. $X = \mathbb{R}^n, \; x = (x_1, \ldots, x_n), \; y = (y_1, \ldots, y_n)$
$x \circ y = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot y_i$ - iloczyn skalarny(standardowy) w $\mathbb{R}^n$.

PRZ. Pokazać, że $(x_1,y_1)\circ(x_2,y_2)=x_1y_1+x_2y_2$ jest iloczynem skalarnym w $\mathbb{R}^2$.

PRZ.

$L^2[a,b]=\{f:\ [a,b]\to\mathbb{R}:\ \int\limits_{[a,b]} f^2(x)dx<+\infty\}$ - zbiór funkcji całkowalnych z kwadratem

$f\circ g=\int\limits_{[a,b]} f(x)\cdot g(x)dx$ jest iloczynem skalarnym w $L^2[a,b]$.

TW. Każda przestrzeń unitarna jest przestrzenią unormowaną (z $||x||\overset{df}{=}\sqrt{x\circ x}$).

DEF. Przestrzeń unitarną zupełną nazywamy **przestrzenią Hilberta**.

PRZ. $\mathbb{R}^n$ ze standardowym iloczynem skalarnym jest przestrzenią Hilberta.