

Analiza II, egzaminy 2019/20

Termin 1

Zad. 1. a) Zbadaj zbieżność i zbieżność bezwzględną szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$.

b) Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcyjnego $f_n(x) = \frac{n}{n+x}$ na przedziale $[0, +\infty)$.

Zad. 2. Rozwiń w szereg Fouriera funkcję $f(x) = \pi^2 - x^2$ w $[-\pi, \pi]$, narysuj wykres sumy otrzymanego szeregu dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ i korzystając z otrzymanego rozwinięcia oblicz sumę szeregu

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

Czy otrzymany szereg Fouriera jest jednostajnie zbieżny do funkcji f ? Odpowiedź uzasadnij.

Zad. 3. Wyznacz metodą Lagrange'a ekstrema warunkowe funkcji $f(x, y, z) = xyz$ przy warunku $x + y + z = 3$, gdzie $x \neq 0$.

Zad. 4. Oblicz moment bezwładności jednorodnej bryły: $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ o masie M względem osi OZ .

Zad. 5. Oblicz całkę krzywoliniową skierowaną

$$\int_K \frac{x^2 dy - y^2 dx}{x^{\frac{5}{3}} + y^{\frac{5}{3}}}$$

gdzie K jest częścią asteroidy: $x = R \cos^3 t$, $y = R \sin^3 t$ od punktu $A = (R, 0)$ od punktu $B = (0, R)$.

Termin 2

Zad. 1. Wyznacz obszar zbieżności punktowej i jednostajnej szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$.

Zad. 2. Wyznacz obszar zbieżności i sumę szeregu $x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$.

Zad. 3. Wyznacz wartość największą i najmniejszą osiąganą przez funkcję $f(x, y, z) = x + y + z$ na zbiorze $V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$.

Zad. 4. Wyznacz środek ciężkości jednorodnej bryły $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Zad. 5. Oblicz całkę $\int_K \sqrt{x^2 + y^2} dl$, gdzie $K: x^2 + y^2 = ax$, $a > 0$.

Termin 3

Zad. 1. Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcyjnego $f_n(x) = nx^n(1-x)$ na $[0, 1]$.

Zad. 2. Wyznacz obszar zbieżności i sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n \cdot 4^n}$.

Zad. 3. Zbadaj różniczkowalność w całej dziedzinie funkcji $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4 - y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Zad. 4. Oblicz moment bezwładności względem osi OZ jednorodnej bryły o masie M ograniczonej powierzchniami $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ oraz $z = R$.

Zad. 5. Wyznacz środek ciężkości jednorodnej cykloidy: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, gdzie $t \in [0, 2\pi]$.