Analiza II, egzaminy 2020/21

Termin 1

Zad. 1. Wyznacz obszar zbieżności punktowej D_p i sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$.
Sprawdź, czy szereg ten jest również zbieżny jednostajnie w D_p.
Zad. 2. Korzystając z odpowiedniego szeregu potęgowego oblicz sumę szeregu liczbowego
$1 - \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} - \frac{5}{2^4} + \ldots$
Zad. 3. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji uwikłanej $y = y(x)$ danej równaniem

$$y^3 - (y - \ln x)^2 = y.$$

Zad. 4. Oblicz objętość bryły wyciętej walcem $x^2 + y^2 = Ry$ z kuli $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant R^2$.
Zad. 5. Oblicz

$$\int_K x^y \left(\frac{y}{x} dx + \ln x dy\right)$$

gdzie K jest częścią paraboli $y = x^2$ od punktu $A(1,1)$ do punktu $B(2,4)$.

Termin 2

Zad. 1. Rozwiń w szereg Maclaurina funkcję $f(x) = \frac{12-5x}{6-5x-x^2}$. Dla jakich x suma otrzymanego szeregu jest równa $f(x)$?
Zad. 2. Rozwiń w szereg sinusów funkcję $f(x) = \pi - x$ w $(0, \pi)$ i narysuj wykres sumy otrzymanego szeregu dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$.
Zad. 3. Korzystając z metody Lagrange'a daną liczbę dodatnią a rozłóż na n składników tak, aby suma ich kwadratów była najmniejsza z możliwych.
Zad. 4. Oblicz masę nieskończonej bryły $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant 1$ o gęstości $\rho(x, y, z) = e^{-\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.
Zad. 5. Oblicz $\int_K \sqrt{x^2 + y^2} dl$, gdzie K: $x^2 + y^2 = 2x$.

Termin 3

Zad. 1. Sprawdź, czy szereg $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1 - x)$ jest jednostajnie zbieżny na przedziale:
a) (3p) $[0, 1]$,
b) (3p) $[0, \frac{1}{2}]$,
c) (4p) $[0, 1)$.
Zad. 2. Wyznacz obszar zbieżności i sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{2n}}{n \cdot 4^n}$.
Zad. 3. Zbadaj różniczkowalność w całej dziedzinie funkcji $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4 - x^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$
Zad. 4. Oblicz objętość bryły ograniczonej powierzchniami: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ i $x^2 + y^2 = 3z$ do której należy punkt A(0,0,1).
Zad. 5. Oblicz $\int_{(0,1)}^{(3,2)} (4xy^3 - \frac{1}{y}) dx + (6x^2y^2 + \frac{x}{y^2}) dy$.