

SZEREGI LICZBOWE (RZECZYWISTE, ZESPOLONE)

PRZ. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$

$$S = \frac{a_1}{1 - q}, |q| < 1$$

PRZ.

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots =$$

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots = 0$$

$$1(-1 + 1)(-1 + 1)(-1 + 1) - \dots = 1 + 0 + 0 + 0 + \dots = 1$$

DEF. Dany jest ciąg $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ - n -ta suma częściowa

Szeregiem nazywamy parę $((a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (S_n)_{n \in \mathbb{N}})$

Ozn. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

PRZ. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)}$$

$$S_1 = a_1 = \frac{1}{2}$$

$$S_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = S_2 + a_3 = \frac{8+1}{12} = \frac{3}{4}$$

$$S_n = \frac{n}{n+1} \text{ - dowód indukcyjny}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \leftrightarrow \left(\left(\frac{1}{n(n+1)} \right)_{n \in \mathbb{N}}, \left(\frac{n}{n+1} \right)_{n \in \mathbb{N}} \right)$$

DEF. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy zbieżnym \Leftrightarrow istnieje takie $S \in \mathbb{R}, \mathbb{C}$, że $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$

S - suma szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

PRZ. $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

$$S_n = \frac{n}{n+1},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1$$

PRZ. $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}$

$$S_n = \frac{1 + (-1)^{n+1}}{2} \text{ nie jest zbieżny}$$

Spostrzeżenie.

zał: $k \in \mathbb{N}$

teza: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ zbieżny $\Leftrightarrow \sum_{n=k}^{\infty} a_n$ zbieżny

TW. (WK zbieżności szeregu)

zał: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny

teza: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

PRZ. $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (szereg harmoniczny)
spełnia warunek konieczny zbieżności szeregu (ale NIE jest zbieżny)

TW. (o zbieżności szeregów harmonicznym)

zał: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}, \alpha \in \mathbb{R}$ (szereg harmoniczny rzędu α)

teza:

$\alpha > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ jest zbieżny

$\alpha \leq 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ nie jest zbieżny

PRZ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
szereg harmoniczny rzędu $\alpha = 1$ więc nie jest zbieżny

DEF. Szereg $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nazywamy **bezwzględnie zbieżnym** \Leftrightarrow gdy $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ jest zbieżny.

Jeśli $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny, ale nie jest bezwzględnie zbieżny, to mówimy, że jest **warunkowo zbieżny**.

TW. (o zbieżności szeregu bezwzględnie zbieżnego)

zał: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest bezwzględnie zbieżny

teza: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny

PRZ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

TW. (kryterium d'Alamberta)

zał: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \neq 0$

$g = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$

teza:

$g < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny

$g > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nie jest zbieżny

TW. (kryterium Cauchy'ego)

zał: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

$g = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

teza:

$g < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny

$g > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nie jest zbieżny

PRZ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

PRZ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$

TW. (kryterium porównawcze graniczne ilorazowe)

zał: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

$\forall n \geq n_0 \quad a_n \geq 0, b_n > 0$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = g \in (0, +\infty)$

teza: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ jest zbieżny $\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ jest zbieżny

PRZ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 - 2n + 3}{n^4 + 2n^3 - 2}$

PRZ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{n}$

TW. (kryteria porównawcze)

zał: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

$\forall n \geq n_0, a_n \geq 0, b_n \geq 0$

$\forall n \geq n_1 \quad a_n \leq b_n$

teza:

- 1) kryterium ma zbieżność
Jeśli $\sum b_n$ jest zbieżny $\Rightarrow \sum a_n$ jest zbieżny
- 2) kryterium ma rozbieżność
Jeśli $\sum a_n$ jest rozbieżny $\Rightarrow \sum b_n$ jest rozbieżny

PRZ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{n}$

TW. (kryterium całkowite)

zał: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$

$\forall n \geq n_0 \quad a_n \geq 0$

$f: [n_0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}_+$

$\forall n \geq n_0 \quad a_n = f(n)$

f jest nierosnąca na przedziale $[n_0, +\infty)$

teza: $\sum a_n$ jest zbieżny $\Leftrightarrow \int_{n_0}^{+\infty} f(x) dx$ jest zbieżna

PRZ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$

DEF. Szeregiem naprzemiennym nazywamy szereg postaci

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n,$ gdzie:

- 1) $\forall n \geq 1 \quad a_n > 0$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

3) $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ jest malejący

TW. (kryterium Leibniza)

Szereg naprzemienny jest zbieżny.

Ponadto

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |S_n - S| < a_{n+1}$$

PRZ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

CIĄGI FUNKCYJNE

$$Y = \mathbb{R}, \quad X \subset \mathbb{R}$$

DEF. Ciągiem funkcyjnym nazywamy $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$, gdzie $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n : X \rightarrow Y$.

DEF. Mówimy, że ciąg funkcyjny $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ jest **zbieżny punktowo** na $X \Leftrightarrow$ istnieje taka funkcja $f : X \rightarrow Y$, że $\forall x \in X \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$.

Funkcję f nazywamy **funkcją graniczną** ciągu funkcyjnego $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$.

Ozn. $f_n \xrightarrow{X} f$ - ciąg $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny punktowo na X

$$(\Leftrightarrow \forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

PRZ. $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad x \in [0, 1]$

DEF. Mówimy, że ciąg funkcyjny $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ jest **zbieżny jednostajnie** na X

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall x \in X \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Ozn. $f_n \xrightarrow{X} f$ - ciąg $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ jest jednostajnie zbieżny na X .

TW. (WK na jednostajną zbieżność)

Jeśli ciąg funkcyjny $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ jest jednostajnie zbieżny (do f) na X , to $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ jest punktowo zbieżny (do f)

$$(f_n \xrightarrow{X} f \Rightarrow f_n \xrightarrow{X} f)$$

PRZ. $f_n(x) = \frac{\sin nx}{n}$

TW. zał: $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n : X \rightarrow Y$ ciągle

$$f_n \xrightarrow{X} f$$

teza: f jest ciągła na X

PRZ. $f_n(x) = x^n, \quad X = [0, 1]$

DEF. $B(X, Y)$ - zbiór funkcji ograniczonych

$$f \in B(X, Y) \stackrel{def}{\Leftrightarrow} f : X \rightarrow Y \text{ i } f[X] \text{ jest ograniczony}$$

DEF. $f, g \in B(X, Y)$

$$d_c(f, g) \stackrel{def}{=} \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

TW. Funkcja d_c jest metryką (Czebyszewa) w zbiorze $B(X, Y)$

TW. zał: $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n \in B(X, Y)$

$$(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}, x \in X$$

$$\text{teza: } f_n \xrightarrow{X} f \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d_c(f_n, f) = 0$$

PRZ. $f_n(x) = x^n$ na $[0, 1)$

PRZ. Zbadaj jednostajną zbieżność ciągu funkcyjnego a) $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$ na \mathbb{R} ,

$$\text{b) } f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \text{ na } \mathbb{R}.$$

PRZ. $f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}, x \in \mathbb{R}$

Czy $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ jest jednostajnie zbieżny na \mathbb{R} ?

Problem:

$$f_n \xrightarrow{X} f$$

$$f'_n \rightarrow f'?$$

$$x_1, x_2 \in X \quad \int_{x_1}^{x_2} f_n(x) dx \rightarrow \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx?$$

TW. (o różniczkowalności granicy ciągu funkcyjnego)

zał: $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n : X \rightarrow Y$ jest różniczkowalna

X - przedział $\subset \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}$

$$f_n \xrightarrow{X} f$$

(f'_n) jest jednostajnie zbieżny na X

$$\text{teza: } \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right)' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \quad \forall x \in X$$

TW. (o całkowaniu granicy ciągu funkcyjnego)

zał: $\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n : X \rightarrow Y$, całkowalna

X - przedział $\subset \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}$

$(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ jest jednostajnie zbieżny (do f)

$$\text{teza: } \forall x_1, x_2 \in X \quad \int_{x_1}^{x_2} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{x_1}^{x_2} f_n(x) dx$$

SZEREGI FUNKCYJNE

$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n \in B(X, Y)$

$(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ - ciąg funkcyjny

$$S_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n f_i \quad (\Leftrightarrow \forall x \in X \quad S_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x))$$

DEF. Szeregiem funkcyjnym nazywamy parę ciągów $((f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}, (S_n(x))_{n \in \mathbb{N}})$, $x \in X$

$$\text{Ozn. } \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), x \in X$$

PRZ. $f_n(x) = x^n, x \in [0, 1)$

DEF. Szereg funkcyjny $((f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}, (S_n(x))_{n \in \mathbb{N}})$ jest **punktowo zbieżny** na X

$$\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \text{istnieje taka funkcja } S : X \rightarrow Y, \text{ że } S_n \xrightarrow{X} S$$

S - suma szeregu funkcyjnego

DEF. Szereg funkcyjny $((f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}, (S_n(x))_{n \in \mathbb{N}})$ jest **jednostajnie zbieżny** na X do S

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} S_n \xrightarrow{X} S.$$

TW. (WK jednostajnej zbieżności szeregu funkcyjnego)

Jeśli szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny na X (do $S(x)$), to $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest punktowo zbieżny na X (do $S(x)$).

TW. (WK punktowej zbieżności szeregu funkcyjnego)

zał: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest punktowo zbieżny na X

teza: $\forall x \in X \quad \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = 0$ (tzn. $(f_n \xrightarrow{X} 0 \equiv f)$)

TW. (WK jednostajnej zbieżności szeregu funkcyjnego)

zał: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny na X

teza: $f_n \xrightarrow{X} 0$.

PRZ. Czy $\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ jest jednostajnie zbieżny na $[0, 1)$?

TW. (Weierstrassa)

zał: $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}, X \subset \mathbb{R}$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in X \quad |f_n(x)| \leq a_n$

$\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ zbieżny

teza: $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny na zbiorze X .

PRZ. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n(1-x)}{n}$

Czy jest jednostajnie zbieżny na $[0, 1]$?

TW.zał: $\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n : X \rightarrow \mathbb{R}, X \subset \mathbb{R}$

f_n - różniczkowalna na X .

$\sum_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$ zbieżny na X .

$\sum_{n \in \mathbb{N}} f'_n(x)$ jednostajnie zbieżny na X .

teza: $\forall x \in X \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$

TW.zał: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n : X \rightarrow \mathbb{R}, X$ - przedział $\subset \mathbb{R}$

$\forall n \in \mathbb{N} \quad f_n$ jest całkowalna na X .

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny

teza: $\forall x_1, x_2 \in X \quad \int_{x_1}^{x_2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_1}^{x_2} f_n(x) dx$

TW. zał: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

$\forall n \in \mathbb{N}, f_n : X \rightarrow \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$

$\forall n \in \mathbb{N}, f_n$ jest ciągła na X .

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny na X

teza: suma szeregu $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ jest funkcją ciągłą na X

SZEREGI POTĘGOWE

DEF. Szeregiem potęgowym o środku w punkcie x_0 nazywamy szereg funkcyjny postaci:

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, gdzie:

$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$

(lub $a_n \in \mathbb{C}, x \in \mathbb{C}, x_0 \in \mathbb{C}$)

Spostrzeżenie. Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ jest zbieżny w x_0

Dowód. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 0^n = a_0$

TW. zał: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ (*)

teza:

- 1) Jeśli szereg (*) jest zbieżny dla pewnego x_1 , to jest zbieżny dla wszystkich x_1 takich, że $|x_2 - x_0| < |x_1 - x_0|$
- 2) Jeśli szereg (*) nie jest zbieżny dla x_1 , to nie jest również zbieżny dla wszystkich x_2 takich, że $|x_2 - x_0| > |x_1 - x_0|$

DEF. $R = \sup\{|x-x_0| : \text{szereg } \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \text{ jest zbieżny}\}$

$R = 0 \Rightarrow$ szereg (*) jest zbieżny tylko w x_0

$R = +\infty \Rightarrow$ szereg (*) jest zbieżny $\forall x \in \mathbb{R}$ ($\forall x \in \mathbb{C}$)

$0 < R < +\infty$

Przedział $(x_0 - R, x_0 + R)$ nazywamy **przedziałem zbieżności**.

Zbiór $\{x \in \mathbb{C} : |x-x_0| < R\}$ nazywamy kołem zbieżności.

Spostrzeżenie.

Szereg (*) jest zbieżny w $(x_0 - R, x_0 + R)$ i nie jest zbieżny w $(-\infty, x_0 - R) \cup (x_0 + R, +\infty)$

Szereg (*) w punktach $x_0 - R$ i $x_0 + R$ może być zbieżny lub niezbieżny

TW. (Cauchy'ego - Hadamarda)

zał: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$

$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ (lub $\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$)

teza:

$$R = \begin{cases} +\infty, & \lambda = 0 \\ \frac{1}{\lambda}, & 0 < \lambda < +\infty \\ 0, & \lambda = +\infty \end{cases}$$

TW. (o zbieżności szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$)

zał: $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest zbieżny w $(x_0 - R, x_0 + R)$ ($R > 0$)

teza:

- 1) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest bezwzględnie zbieżny w $(x_0 - R, x_0 + R)$
- 2) $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ jest **niemal jednostajnie zbieżny** w $(x_0 - R, x_0 + R)$
(tzn. jest zbieżny jednostajnie w każdym przedziale domkniętym $[a, b] \subset (x_0 - R, x_0 + R)$)

TW. (o własnościach sumy szeregu potęgowego)

zał: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ jest zbieżny w $(x_0 - R, x_0 + R)$

teza:

- 1) Suma szeregu $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ jest funkcją ciągłą w $(x_0 - R, x_0 + R)$
- 2) Suma szeregu $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ jest różniczkowalna $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ i zachodzi wzór:
$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \right)' \stackrel{tw}{=} \sum_{n=0}^{\infty} [a_n(x-x_0)^n]'$$

- 3) Suma szeregu $S(x)$ jest całkowalna w $(x_0 - R, x_0 + R)$ i zachodzi wzór:

$\forall x_1, x_2 \in (x_0 - R, x_0 + R)$

$$\int_{x_1}^{x_2} S(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \right) dx \stackrel{tw}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{x_1}^{x_2} a_n(x-x_0)^n dx$$

PRZ. Wyznacz obszar zbieżności i sumę szeregu potęgowego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

TW. (Abela)

zał: szereg potęgowy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ jest zbieżny w $(x_0 - R, x_0 + R)$ i w $x_1 = x_0 - R$ ($x_2 = x_0 + R$)

istnieje $\lim_{x \rightarrow x_1^+} S(x)$ ($\lim_{x \rightarrow x_2^-} S(x)$)

teza: $S(x_1) = \lim_{x \rightarrow x_1^+} S(x)$ ($S(x_2) = \lim_{x \rightarrow x_2^-} S(x)$)

PRZ. Wyznacz obszar zbieżności i sumę szeregu potęgowego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$.

PRZ. Wyznacz obszar zbieżności i sumę szeregu potęgowego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n x^{2n}}{4^n}$.

PRZ. Oblicz sumę szeregu liczbowego $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$

SZEREGI TAYLORA

TW. (o wzorze Taylora) - przypomnienie

zał: U - otoczenie punktu x_0

$$f \in C^n(U)$$

$$x \in U$$

teza: $\exists c \in (x_0, x)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + R_n(x_0, x), \text{ gdzie } R_n(x_0, x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-x_0)^n$$

TW. (o rozwijaniu w szereg Taylora)

zał: U - otoczenie punktu x_0

$$f \in C^\infty(U)$$

$$x \in U$$

$$\forall x \in U \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x_0, x) = 0$$

teza: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$ - **szereg Taylora** funkcji f w punkcie x_0

Jeżeli $x_0 = 0$, to ten szereg nazywamy **szeregiem Maclaurina**.

PRZ. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, x \in \mathbb{R}$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}, x \in \mathbb{R}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}, x \in \mathbb{R}$$

DEF. $\sin z \stackrel{def}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, z \in \mathbb{C}$

$$\cos z \stackrel{def}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, z \in \mathbb{C}$$

$$e^z \stackrel{def}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, z \in \mathbb{C}$$

TW. (o wzorze Eulera)

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z$$

Wniosek: $z = \pi$

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

PRZ. Rozwinąć w szereg Maclaurina $f(x) = e^{x^3}$.

PRZ. Rozwinąć w szereg Maclaurina $f(x) = e^{3x+1}$.

PRZ. Rozwinąć w szereg Maclaurina $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

Wzór na sumę szeregu geometrycznego: $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n = \frac{a_0}{1-q}, |q| < 1$.

PRZ. Rozwinąć w szereg Maclaurina $f(x) = \frac{2x}{3-4x}$.

PRZ. Rozwinąć w szereg Maclaurina $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

PRZ. Rozwinąć w szereg Maclaurina $f(x) = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$.

PRZ. Rozwinąć w szereg Maclaurina $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$.

DEF. Uogólniony symbol Newtona

$$\alpha \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}, & k > 0 \end{cases}$$

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k \cdot b^{n-k}$ - wzór dwumianowy Newtona

$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k, x \in \mathbb{R}$

TW. (uogólniony wzór Newtona)

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k, x \in (-1, 1)$$

PRZ. Rozwinąć w szereg Maclaurina $f(x) = \sqrt{1+x}$.

SZEREGI FOURIERA

DEF. $L^2[a, b] := \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : \int_{[a, b]} f^2(x) dx < +\infty \right\}$

$L^2[a, b]$ - zbiór funkcji całkowalnych z kwadratem

Uwaga. Funkcje różniące się na zbiorze miary Riemanna równej zero będziemy utożsamiać.

Uwaga. $(L^2[a, b], +, \mathbb{R}, *)$ jest przestrzenią wektorową.

TW. Odwzorowanie:

$$\circ : L^2[a, b] \times L^2[a, b] \ni (f, g) \rightarrow (f \circ g) = \int_{[a, b]} f(x)g(x) dx, \quad f, g \in L^2[a, b]$$

jest iloczynem skalarnym w $L^2[a, b]$.

WN. 1. $(L^2[a, b], \circ)$ jest przestrzenią unitarną.

2. $(L^2[a, b], \|\cdot\|)$ jest przestrzenią unormowaną, przy czym

$$\|f\| = \sqrt{f \circ f} = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}$$

3. $(L^2[a, b], d)$ jest przestrzenią metryczną, gdzie

$$d(f, g) = \|f - g\| = \sqrt{\int_a^b [f(x) - g(x)]^2 dx}$$

Uwaga. Zbieżność w sensie metryki d nazywa się **zbieżnością przeciętną z kwadratem**.

DEF. (ciągu ortogonalnego)

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Niech $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^2[a, b]$.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \varphi_n \neq 0.$$

Ciąg $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nazywamy **ortogonalnym** $\Leftrightarrow \forall i, j \in \mathbb{N}, i \neq j \quad \varphi_i \circ \varphi_j = 0$.

Ciąg $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nazywamy **ortonormalnym** $\Leftrightarrow \forall i, j \in \mathbb{N}, \quad \varphi_i \circ \varphi_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}$ - **delta**

Kroneckera

DEF. (szeregu ortogonalnego)

Niech $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ będzie ciągiem ortogonalnym i niech $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$.

Wtedy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$ nazywamy **szeregiem ortogonalnym**.

TW. (współczynniki Eulera – Fouriera)

zał: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$ - szereg ortogonalny zbieżny jednostajnie do funkcji $f \in L^2[a, b]$

teza: $\forall n \in \mathbb{N} \quad c_n = \frac{f \circ \varphi_n}{\|\varphi_n\|^2}$ - współczynniki Eulera - Fouriera

DEF. $f \in L^2[a, b]$, $(\varphi_n) \subset L^2[a, b]$, (φ_n) - ciąg ortogonalny

Szeregiem Fouriera względem (φ_n) funkcji f nazywamy $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$, gdzie $c_n = \frac{f \circ \varphi_n}{\|\varphi_n\|^2}$.

Piszemy $f \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$

DEF. Mówimy, że f jest **rozwijalna w szereg Fouriera** względem ciągu ortogonalnego (φ_n)

$$\Leftrightarrow \forall x \in [a, b] \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x)$$

(tzn. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$ jest zbieżny punktowo do f na $[a, b]$).

TW. (nierówność Bessela)

zał: $f \in L^2[a, b]$, $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ - ciąg ortogonalny

$$c_n = \frac{(f \circ \varphi_n)}{\|\varphi_n\|^2} \text{ dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{teza: } \|f\|^2 \geq \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \|\varphi_n\|^2$$

TW. (tożsamość Parsewala)

zał: $f \in L^2[a, b]$,

$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$ (czyli $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$ jest szeregiem Fouriera funkcji f względem $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$)

teza:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n \text{ - zbieżny przeciętnie z kwadratem do } f \Leftrightarrow \|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \|\varphi_n\|^2.$$

DEF. (ciągu zupełnego)

Niech $L^2[a, b] \supset (\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ - ciąg ortogonalny

Ciąg $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nazywamy **zupełnym** $\Leftrightarrow \forall f \in L^2[a, b] \quad \|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \|\varphi_n\|^2$

WN.zał: $f \in L^2[a, b]$, $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ - ciąg zupełny

$f \sim \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$ (czyli $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$ jest szeregiem Fouriera funkcji f względem $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$)

teza: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n$ jest zbieżny przeciętnie z kwadratem do f na $[a, b]$

SZEREGI TRYGONOMETRYCZNE FOURIERA

Niech $L^2[-\pi, \pi]$ będzie zbiorem funkcji całkownych z kwadratem na $[-\pi, \pi]$.

Dany jest ciąg funkcji (φ_n) :

$1, \cos x, \sin x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots$

TW. 1. Ciąg (φ_n) jest ciągiem ortogonalnym.

2. Ciąg (φ_n) jest ciągiem zupełnym.

DEF. $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ całkowna

Szeregiem trygonometrycznym Fouriera funkcji f na przedziale $[-\pi, \pi]$ nazywamy szereg postaci

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

gdzie:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx,$$

DEF. (warunki Dirichleta)

1) $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, f - ograniczona

2) f jest przedziałami monotoniczna w $[a, b]$ (tzn., że przedział $[a, b]$ da się podzielić na skończoną liczbę przedziałów, w których funkcja jest monotoniczna [stała, rosnąca lub malejąca])

3) funkcja f jest ciągła w $[a, b]$ poza skończoną liczbą punktów nieciągłości x_0 , w których jednakże musi zachodzić

$$f(x_0) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)}{2}$$

4) $f(a) = f(b) = \frac{\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) + \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)}{2}$

TW. Jeśli funkcja f spełnia warunki Dirichleta w przedziale $[-\pi, \pi]$, to szereg trygonometryczny Fouriera tej funkcji jest zbieżny punktowo do tej funkcji na $[-\pi, \pi]$ czyli

$$\forall x \in [-\pi, \pi] \quad f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Mówimy wtedy, że f jest rozwijalna w szereg trygonometryczny Fouriera w $[-\pi, \pi]$.

Spostrzeżenie. Suma szeregu trygonometrycznego $S_f(x)$ funkcji $f(x)$ jest okresowa o okresie podstawowym $T = 2\pi$.

PRZ. Rozwiń w szereg Fouriera funkcję $f(x) = x$ w $(-\pi, \pi)$.

TW. (o rozwijaniu w szereg Fouriera funkcji nieparzystej)

zał: f jest nieparzysta na $[-\pi, \pi]$

f spełnia warunki Dirichleta na $[-\pi, \pi]$

teza: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, x \in [-\pi, \pi],$
gdzie $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nxdx$

TW. (o rozwijaniu w szereg Fouriera funkcji parzystej)

zał: f jest parzysta i spełnia warunki Dirichleta w $[-\pi, \pi]$

teza: $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, x \in [-\pi, \pi],$

$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx,$

$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nxdx.$

PRZ. Rozwiń w szereg Fouriera funkcję $f(x) = x$ w $(-\pi, \pi).$

DEF. Niech f będzie określona na przedziale $(0, \pi).$

Rozwinięciem w szereg sinusów funkcji f nazywamy szereg trygonometryczny Fouriera funkcji f^* będącej rozszerzeniem funkcji f w taki sposób, aby f^* była funkcją nieparzystą określoną na $[-\pi, \pi]$ (i spełniała warunki Dirichleta).

Wtedy $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, x \in (0, \pi),$

gdzie $b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nxdx.$

DEF. Niech f będzie określona na przedziale $(0, \pi).$

Rozwinięciem w szereg cosinusów funkcji f nazywamy szereg trygonometryczny Fouriera funkcji f^* będącej rozszerzeniem funkcji f w taki sposób, aby f^* była funkcją parzystą określoną na $[-\pi, \pi]$ (i spełniała warunki Dirichleta).

Wtedy $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, x \in (0, \pi),$

gdzie $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx,$

$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nxdx.$

Przypadek ogólny.

Niech $L^2[x_0 - l, x_0 + l]$ będzie zbiorem funkcji całkowalnych z kwadratem na $[x_0 - l, x_0 + l].$

Dany jest ciąg funkcji $(\varphi_n):$

$1, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \cos \frac{2\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{n\pi x}{l}, \sin \frac{n\pi x}{l}, \dots$

DEF. Szeregiem trygonometrycznym Fouriera funkcji f na przedziale $[x_0 - l, x_0 + l]$ nazywamy szereg postaci

$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l})$

gdzie:

$a_0 = \frac{1}{l} \int_{x_0-l}^{x_0+l} f(x) dx,$

$a_n = \frac{1}{l} \int_{x_0-l}^{x_0+l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx,$

$b_n = \frac{1}{l} \int_{x_0-l}^{x_0+l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$

Uwaga. Pozostałe twierdzenia i definicje są analogiczne jak w przypadku $L^2[-\pi, \pi]$.

Rachunek różniczkowy funkcji wielu zmiennych

$(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}, +, \cdot)$ - przestrzeń wektorowa

$(\mathbb{R}^k, \|\cdot\|)$ przestrzeń wektorowa z normą euklidesową (która jest przestrzenią Banacha)

(\mathbb{R}^k, d_e) przestrzeń wektorowa z metryką euklidesową

TW. Zał: ciąg $(x_n) \subseteq \mathbb{R}^k$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^k) \in \mathbb{R}^k$$

$$\text{Teza: } \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = (g_1, g_2, \dots, g_k) \Leftrightarrow \forall i = 1, 2, \dots, k \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^i = g_i$$

DEF. $D \subset \mathbb{R}^n$

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$x \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f_1(x_1, x_2, \dots, x_n), f_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, x_2, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^m$$

$$f_i: D \rightarrow \mathbb{R} \text{ - funkcja składowa, } i = 1, 2, \dots, m$$

f jest funkcją n zmiennych

PRZ. $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) = (v_x(x, y, z), v_y(x, y, z), v_z(x, y, z))$$

DEF. $D \subset \mathbb{R}^m, \quad S(x_0, r) \subset D$

Mówimy, że granicą funkcji f w punkcie x_0 jest $g \stackrel{def}{\Leftrightarrow}$ dla każdego ciągu $(x_n)_n \in \mathbb{N}$ spełniającego warunki:

$$1. \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \in D$$

$$2. \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \neq x_0$$

$$3. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

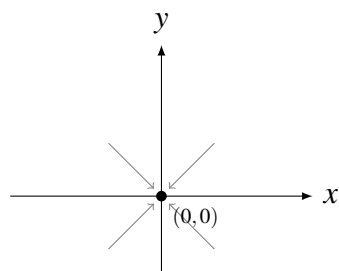
zachodzi $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = g$

PRZ. $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

$$x_0 = (0, 0)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$



$$x_n = \left(\frac{1}{n}, 0\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}, 0\right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot 0}{\frac{1}{n^2} + 0^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$$

$$x_n' = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n') = \lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ nie istnieje

PRZ. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = \left| \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ (x,y) \rightarrow (0,0) \Leftrightarrow r \rightarrow 0 \\ \varphi - \text{dowolne} \end{array} \right| =$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos^2 \varphi \cdot r \sin \varphi}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r \cdot \underbrace{\cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi}_{\text{ograniczona } \in [-1,1]} = 0 \quad (\text{skorzystaliśmy z twierdzenia granicy iloczynu funkcji zbieżnej do 0 i funkcji ograniczonej})$$

PRZ. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^4}$

(1) $\lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \varphi - \text{dowolne}}} \frac{r^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi}{r^2 \cos^2 \varphi + r^4 \sin^4 \varphi} =$
 $= \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \varphi - \text{dowolne}}} \frac{r \cos^2 \varphi \sin \varphi}{\cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} = ???$

(2) $x_n = (\frac{1}{n}, 0)$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2} \cdot 0}{\frac{1}{n^2} + 0^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$

$x_n' = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 1} = 0$

Z tego, że dla tych dwóch ciągów wyszła nam ta sama granica jeszcze nic nie wynika.

(3) $0 \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^4} \right| \leq \left| \frac{x^2}{x^2 + y^4} \right| |y| \leq 1 \cdot |y| \rightarrow 0.$

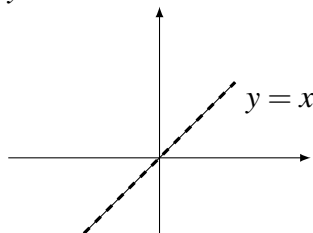
Zatem, z tw. o trzech funkcjach, wynika, że $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^4} = 0.$

GRANICE ITEROWANE

$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y) \quad f: D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^2$
 $\lim_{y \rightarrow y_0} (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x,y)), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (\lim_{y \rightarrow y_0} f(x,y))$ - granice iterowane

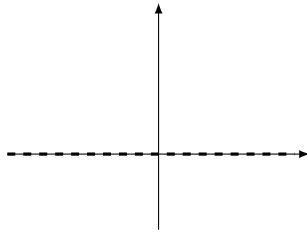
PRZ. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}$

• $y = x$



$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + 0^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$

• $y = 0$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot 0^2}{x^2 \cdot 0 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$$

\Rightarrow granica podwójna nie istnieje.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot y^2}{x^2 \cdot y^2 + (x - y)^2} = \frac{0}{y^2} = 0$$

Analogicznie, $\lim_{y \rightarrow 0}(0) = 0$.

\Rightarrow obie granice iterowane istnieją i są sobie równe 0.

Uwaga. Z istnienia (i równości) granic iterowanych NIE wynika, że istnieje granica podwójna.

Z tego, że granice iterowane nie istnieją (lub są różne) NIE wynika, że granica podwójna również nie istnieje.

DEF. $f : D \rightarrow \mathbb{R}^k, D \subset \mathbb{R}^n$

$x_0 \in U, U$ - otoczenie punktu $x_0, U \subset D$

f jest ciągła w punkcie $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

TW. Zał: $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m, D \subset \mathbb{R}^n$

$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$

$x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n) \in U \subset D$

$f_i : D \rightarrow \mathbb{R} \quad i = 1, \dots, m$

Teza: f jest ciągła w $x_0 \Leftrightarrow \forall i = 1, \dots, m \quad f_i$ jest ciągła w x_0

PRZ. Zbadaj ciągłość funkcji $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ w punkcie $(0, 0)$.

$$D = \mathbb{R}^2$$

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ r \rightarrow 0 \\ \varphi - \text{dowolne}}} \frac{r^2 \cos^2 \varphi - r^2 \sin^2 \varphi}{r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \\ &= \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \varphi - \text{dowolne}}} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) \Rightarrow f \text{ nie jest ciągła w punkcie } (0, 0) \end{aligned}$$

nie istnieje

TW. Zał: $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$, gdzie X, Y, Z są przestrzeniami topologicznymi

f jest ciągła w x_0 ,

g jest ciągła w $y_0 = f(x_0)$

Teza: złożenie funkcji $g \circ f$ jest ciągłe w punkcie x_0

TW. Zał: $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^n$

f i g są ciągłe w $x_0 \in U \subset D$

Teza: $f + g, f - g, f \cdot g, \frac{f}{g}$ (o ile $g(x) \neq 0$ w pewnym otoczeniu x_0) są ciągłe w punkcie x_0

PRZ. Sprawdź ciągłość w dziedzinie funkcji $f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

$$D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

$x^2 - y^2$, $x^2 + y^2$ - wielomiany dwóch zmiennych są ciągłe

$\stackrel{\text{tw}}{\Rightarrow} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ jest ciągła (jako iloraz funkcji ciągłych), o ile $x^2 + y^2 \neq 0$

PRZ. Sprawdź ciągłość w dziedzinie funkcji $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 1, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$$D = \mathbb{R}^2$$

$\sin(x^2 + y^2)$ jest ciągły jako złożenie funkcji ciągłych

i analogicznie jak w poprzednim przykładzie funkcja f jest ciągła w $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = |t = x^2 + y^2| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \Rightarrow f \text{ jest ciągła w } (0,0)$$

$\Rightarrow f$ jest ciągła w całym \mathbb{R}^2

DEF. (pochodna wzdłuż wektora)

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad D \subset \mathbb{R}^n$$

$$x_0 \in U \subset D$$

$$h \in \mathbb{R}^n, \quad h - \text{wektor}$$

Pochodną funkcji w punkcie x_0 wzdłuż wektora h nazywamy

$$D_h f(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} \quad (\in \mathbb{R}^m).$$

$$\text{Inne oznaczenie: } \frac{\partial f}{\partial h}(x_0)$$

PRZ. $f(x,y) = x^2 + y^2$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$, $h = (2, 1)$

$$\begin{aligned} D_{(2,1)} f(1,0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((1,0) + t(2,1)) - f(1,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+2t, t) - f(1,0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+2t)^2 + t^2 - 1}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{5t^2 + 4t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} (5t + 4) = 4 \end{aligned}$$

DEF. (pochodna w kierunku wektora)

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}^k, \quad D \subset \mathbb{R}^n$$

$$x_0 \in U \subset D$$

$$h \in \mathbb{R}^n$$

Pochodną kierunkową funkcji f w punkcie x_0 w kierunku wektora h nazywamy pochodną funkcji f w punkcie x_0 wzdłuż wektora h tzn. wzdłuż $\frac{h}{\|h\|}$.

PRZ. Oblicz pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = (xy, x+y)$ w punkcie $(1, -1)$ w kierunku wektora $h = (2, 2)$.

$$\frac{h}{\|h\|} = \frac{(2,2)}{\sqrt{2^2+2^2}} = \frac{(2,2)}{2\sqrt{2}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$D_{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} f(1, -1) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left((1,-1) + t\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right) - f(1,-1)}{t}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(1+t\frac{\sqrt{2}}{2}, -1+t\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - f(1,-1)}{t} =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\left(\left(1+t\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(t\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right), 1+t\frac{\sqrt{2}}{2}-1+t\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - (1,0)}{t}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\frac{1}{2}t^2 - 1, t\sqrt{2}) - (-1, 0)}{t} \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\frac{1}{2}t^2, t\sqrt{2})}{t} = \\
&= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2}t, \sqrt{2}\right) = (0, \sqrt{2})
\end{aligned}$$

DEF. $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$

$x_0 \in U \subset D$

$x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$

Pochodną cząstkową funkcji f w punkcie x_0 względem zmiennej x_i (i-tej zmiennej) nazywamy

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^{i-1}, x_0^i + \Delta x_i, x_0^{i+1}, \dots, x_0^n) - f(x_0^1, \dots, x_0^i, \dots, x_0^n)}{\Delta x_i}$$

PRZ. $f(x, y) = x^2 + y^2$ $x_0 = (1, -1)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(1, -1) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(1+\Delta x, -1) - f(1, -1)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(1+\Delta x)^2 + (-1)^2 - (1)^2 - (-1)^2}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 + 2\Delta x}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x + 2) = 2
\end{aligned}$$

PRZ. $f(x, y) = e^x \cos y$, $D = \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= (e^x \cos y)'_x|_{x=x_0} = \cos y_0 e^x|_{x=x_0} = e^{x_0} \cos y_0 \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= (e^{x_0} \cos y)'_y|_{y=y_0} = e^{x_0} (-\sin y)|_{y=y_0} = -e^{x_0} \sin y_0 \\
\frac{\partial f}{\partial x} &= e^x \cos y \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -e^x \sin y
\end{aligned}$$

Spostrzeżenie. Zał: $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in U \subset D$

w \mathbb{R}^n i \mathbb{R}^m dane są bazy kanoniczne, odpowiednio: $\{e_1, \dots, e_n\}$, $\{e'_1, \dots, e'_m\}$

Teza: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = D_{e_i} f(x_0)$

Dowód. $D_{e_i} f(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f((x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n) + t(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)) - f(x_0^1, \dots, x_0^n)}{t} =$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^i + t, \dots, x_0^n) - f(x_0^1, \dots, x_0^n)}{t} = |t = \Delta x_i| = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0).$$

DEF. $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$

$x_0 \in U \subset D$

Mówimy, że f jest różniczkowalna w $x_0 \stackrel{def}{\iff}$ gdy istnieje takie odwzorowanie liniowe

$L_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, że:

$$\forall h \in \mathbb{R}^n \quad f(x_0 + h) - f(x_0) = L_{x_0}(h) + r_{x_0}(h),$$

gdzie $\lim_{h \rightarrow \vec{0}} \frac{r_{x_0}(h)}{\|h\|} = 0$ ($\in \mathbb{R}^m$), $r_{x_0}(h)$ - reszta

oznaczenie: $L_{x_0} = df(x_0)$ - różniczka funkcji f w punkcie x_0

$L_{x_0}(h) = df(x_0)(h)$

PRZ. $f : (c, d) \rightarrow \mathbb{R}$ $L_{x_0} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $L_{x_0}(h) = a \cdot h$

$x_0 \in (c, d)$

$f(x_0 + h) - f(x_0) = a \cdot h + r_{x_0}(h)$

$$a = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{r_{x_0}(h)}{h} \right) = f'(x_0) + 0 = f'(x_0).$$

TW. (postać macierzowa różniczki funkcji)

Zał: $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$

f jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in U \subset D$

$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$

Teza: różniczka funkcji w punkcie x_0 ma postać

$$df(x_0)(h) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

DEF. Macierz $f'(x_0) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right]_{j=1, \dots, n}^{i=1, \dots, m}$ nazywamy **macierzą Jacobiego** funkcji f w punkcie x_0 .

Jeśli $n = m$, to $J(x_0) = \det \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right]_{j=1, \dots, n}^{i=1, \dots, m}$ nazywamy **jakobianem** funkcji f w punkcie x_0 .

PRZ. Czy funkcja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ jest różniczkowalna w punkcie $(0, 0)$?

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = L_{x_0}(h) + r_{x_0}(h)$$

$$f((0, 0) + (h_1, h_2)) - f(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)h_2 + r_{x_0}(h)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

$$f(h_1, h_2) - 0 = 0 \cdot h_1 + 0 \cdot h_2 + r_{(0,0)}(h_1, h_2)$$

$$r_{(0,0)}(h_1, h_2) = \frac{h_1 \cdot h_2^2}{h_1^2 + h_2^2}$$

$$\lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{r_{(0,0)}(h_1, h_2)}{\|(h_1, h_2)\|} = \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{h_1 h_2^2}{h_1^2 + h_2^2}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} =$$

$$= \lim_{(h_1, h_2) \rightarrow (0,0)} \frac{h_1 h_2^2}{(h_1^2 + h_2^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \varphi \text{ - dowol.}}} \frac{r^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi}{r^3} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \varphi \text{ - dowol.}}} \cos \varphi \cdot \sin^2 \varphi \quad \text{nie istnieje}$$

$\Rightarrow f$ nie jest różniczkowalna w $(0, 0)$

TW. (o związku różniczki z pochodnymi wzdłuż wektora, WK różniczkowalności)

Zał: $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$

$x_0 \in U \subset D$

f jest różniczkowalna w punkcie x_0 (i niech $df(x_0)$ oznacza różniczkę funkcji f w punkcie x_0)

Teza: istnieje pochodna funkcji f w punkcie x_0 wzdłuż dowolnego wektora $h \in \mathbb{R}^n$ i zachodzi $D_h f(x_0) = df(x_0)(h)$.

TW. (WK różniczkowalności związany z pochodnymi cząstkowymi)

Zał: $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 \in U \subset \mathbb{R}^n$

f jest różniczkowalna w punkcie x_0 (i niech $df(x_0)$ oznacza różniczkę funkcji f w x_0)

Teza:

1. $\forall i = 1, \dots, n$ istnieje pochodna cząstkowa $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ w punkcie x_0

2. $\forall h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n \quad df(x_0)(h_1 \dots h_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) \cdot h_i$

TW. (WK różniczkowalności związany z ciągłością)

Zał: $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad D \subset \mathbb{R}^n, \quad x_0 \in U \subset D$

f jest różniczkowalna w x_0

Teza: f jest ciągła w x_0

TW. (WW różniczkowalności)

Zał: $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad D \subset \mathbb{R}^n, \quad x_0 \in U \subset D$

$\forall i = 1, \dots, n$ istnieją i są ciągłe pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ w punkcie x_0

Teza: f jest różniczkowalna w punkcie x_0 i zachodzi:

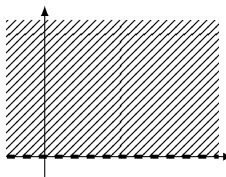
$$\forall h = (h_1, \dots, h_n) \in \mathbb{R}^n \quad df(x_0)(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)h_i$$

PRZ. Czy funkcja $f(x, y) = x^2 + \ln y$ jest różniczkowalna w $(x_0, y_0) = (1, 1)$? Jeśli tak, to podaj różniczkę tej funkcji w tym punkcie.

$D : x \in \mathbb{R}, \quad y > 0$

$D = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}, y > 0\}$

$(x_0, y_0) = (1, 1)$



$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 2 \cdot 1 = 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = \frac{1}{1} = 1 \quad \text{istnieją}$$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ jest ciągła w $(1, 1)$, bo jest wielomianem

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y}$ jest ciągła w $(1, 1)$ bo jest funkcją wymierną

z tw. poprzedniego wynika, że f jest różniczkowalna w $(1, 1)$

$$h \in \mathbb{R}^2 \quad df(1, 1)(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 1) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 1) \cdot h_2 = 2h_1 + 1 \cdot h_2 = 2h_1 + h_2$$

$df(1, 1) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$df(1, 1)(h_1, h_2) = 2h_1 + h_2$$

$$f'(1, 1) = [2, 1]$$

TW. (interpretacja geometryczna różniczkowalności, WKW różniczkowalności)

zał: $f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^2$

teza: f jest różniczkowalna w $(x_0, y_0) \in U \subset D \Leftrightarrow$ istnieje płaszczyzna (ściśle) styczna do powierzchni $z = f(x, y)$ w punkcie $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ o równaniu:

$$z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

PRZ. $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad (x_0, y_0) = (1, 1)$

$$z = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \quad /^2$$

$x^2 + y^2 + z^2 = 4$ równanie sfery o środku w punkcie $(0, 0, 0)$, $R = 2$

$$D_f : 4 - x^2 - y^2 \geq 0$$

$$x^2 + y^2 \leq 4$$

$$(1, 1) \in D_f, \quad (1, 1) \in U \subset D_f$$

Dlaczego jest różniczkowalna?

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{1}{2\sqrt{4-x^2-y^2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{-y}{\sqrt{4-x^2-y^2}} \end{aligned} \right\} \text{ są ciągłe w otoczeniu punktu } (1, 1), \text{ bo iloraz dwóch funkcji}$$

ciągłych, z których jedna jest złożeniem pierwiastka i wielomianu

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{-1}{\sqrt{4-1^2-1^2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

z WW na różniczkowalność $\Rightarrow f$ jest różniczkowalna w $(1,1)$

$$f(x_0, y_0) = f(1,1) = \sqrt{4-1^2-1^2} = \sqrt{2}$$

$$z - \sqrt{2} = \frac{-1}{\sqrt{2}}(x-1) + \frac{-1}{\sqrt{2}}(y-1)$$

Uwaga. Zał: $f: D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^n$

f jest różniczkowalna w $x_0 \in U \subset D$

$$x_0 + h \in U$$

$$\text{Teza: } f(x_0 + h) \cong f(x_0) + df(x_0)(h)$$

PRZ. Oblicz przybliżoną wartość $\sqrt{(0,98)^3 + (2,05)^3}$

$$f(x,y) = \sqrt{x^3 + y^3}$$

$$(x,y) = (0,98; 2,05)$$

$$(x_0, y_0) = (1,2)$$

$$h = (x - x_0, y - y_0) = (-0,02; 0,05)$$

$$df(x_0, y_0)(h_1, h_2) = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)h_2}$$

$$f((x_0, y_0) + (h_1, h_2)) \cong f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)h_2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x^3+y^3}}(3x^2) = \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = \frac{3 \cdot 1^2}{2\sqrt{1+8}} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{x^3+y^3}}(3y^2) = \frac{3y^2}{2\sqrt{x^3+y^3}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = \frac{3 \cdot 2^2}{2\sqrt{1+8}} = 2$$

$$f(0,98; 2,05) \cong \sqrt{1^3 + 2^3} + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{2}{100}\right) + 2 \cdot \frac{5}{100} = 3 + \frac{9}{100} = 3,09$$

DEF. $f: D \rightarrow \mathbb{R}^k, D \subset \mathbb{R}^n$

niech $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ będzie określona w pewnym otoczeniu $U \subset D$ punktu x_0

Pochodną cząstkową 2-go rzędu nazywamy

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0) = \lim_{\Delta x_j \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, \dots, x_{j-1}^0, x_j^0 + \Delta x_j, x_{j+1}^0, \dots, x_n^0) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1^0, \dots, x_n^0)}{\Delta x_j}$$

$$\text{Inaczej } \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)$$

PRZ. $f(x_1, x_2) = x_1^2 - \sin x_2$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = -\cos x_2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} (2x_1) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial}{\partial x_2} (2x_1) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_1} (-\cos x_2) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_2} (-\cos x_2) = \sin x_2$$

DEF. Załóżmy, że w pewnym otoczeniu U funkcja f jest różniczkowalna tzn. $\forall x \in U \quad \exists df(x)$

czyli istnieje funkcja: $U \ni x \rightarrow df(x)$

Funkcje f nazywamy 2-krotnie różniczkowalną w punkcie $x_0 \in U \stackrel{def}{\iff}$ gdy funkcja

$U \ni x \rightarrow df(x)$ jest różniczkowalna w x_0

$$d^2 f(x_0) = d(df)|_{x=x_0}$$

PRZ. $f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^2$

$$df(h_1, h_2) = \frac{\partial f}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f}{\partial y} h_2$$

$$d^2 f(h_1, h_2) = d \left(\frac{\partial f}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f}{\partial y} h_2 \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f}{\partial y} h_2 \right) h_1 + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f}{\partial y} h_2 \right) h_2 =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} h_2 h_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} h_2^2$$

↑

różniczka zupełna rzędu 2-go funkcji f w punkcie x_0

PRZ. $f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^3$

$$df(h_1, h_2, h_3) = \overbrace{\frac{\partial}{\partial x} h_1 + \frac{\partial f}{\partial y} h_2 + \frac{\partial f}{\partial z} h_3}^{(*)}$$

$$d^2 f(h_1, h_2, h_3) = \frac{\partial}{\partial x} (*) h_1 + \frac{\partial}{\partial y} (*) h_2 + \frac{\partial}{\partial z} (*) h_3 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h_1^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} h_2 h_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} h_3 h_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} h_1 h_2 +$$
$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} h_2^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} h_3 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} h_3 h_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} h_2 h_3 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} h_3^2$$

TW. (WW na 2-krotną różniczkowalność)

Zał: istnieją i są ciągle wszystkie pochodne cząstkowe 2-go rzędu funkcji f w punkcie $x_0 \in U \subset D_f$

Teza: f jest 2-krotnie różniczkowalna w x_0

TW. (Schwarza o równości pochodnych mieszanych)

zał: f jest 2-krotnie różniczkowalna w x_0

teza: $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0)$

PRZ. cd. $d^2 f(h_1, h_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} h_1 h_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} h_2^2$

PRZ. cd. $d^2 f(h_1, h_2, h_3) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} h_1^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} h_1 h_2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} h_2 h_3 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} h_1 h_3 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} h_2^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} h_3^2$

Ekstrema lokalne funkcji wielu zmiennych

DEF. $f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^n, \quad D$ - obszar

Mówimy, że f ma maksimum (minimum) lokalne w punkcie $x_0 \in D \Leftrightarrow$

\Leftrightarrow istnieje takie otoczenie $U \subset D$ punktu x_0 , że: $\forall x \in U, x \neq x_0 \quad f(x) \leq f(x_0)$ ($>$)

PRZ. $f(x, y) = x^2 + y^2$

$z = x^2 + y^2$ równanie paraboloidy

f ma w $(0, 0)$ minimum lokalne o wartości 0

TW. (WK istnienia ekstremum lokalnego)

Zał: $f : D \rightarrow \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^n$

f jest różniczkowalna w $x_0 \in D$ (D - obszar)

f ma ekstremum lokalne w x_0

Teza: $df(x_0) = 0$ ($\Leftrightarrow \forall h \in \mathbb{R}^n \quad df(x_0)(h) = 0$)

↑
odwzorowanie liniowe zerowe

$$\left(\Rightarrow \forall i = 1, \dots, n \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0 \right)$$

PRZ. $f(x, y) = x^2 + y^2, \quad D = \mathbb{R}^2$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \end{array} \right\} \text{ pochodne ciągłe jako wielomiany}$$

($\Rightarrow f$ różniczkowalna w \mathbb{R}^2)

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{jedynym punktem, w którym funkcja } f \text{ może mieć ekstremum}$$

(zwanym punktem stacjonarnym) jest punkt $(0, 0)$

DEF. Formą kwadratową nazywamy funkcję $\varphi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że:

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + \dots + a_{1n}x_1x_n + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + a_{23}x_2x_3 + \dots + a_{2n}x_2x_n + \dots + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \dots + a_{nn}x_n^2 =$$

$$= [x_1, \dots, x_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

gdzie macierz A jest macierzą symetryczną i nazywamy ją macierzą formy kwadratowej.

DEF. Mówimy, że forma kwadratowa φ jest

(1) **dodatnio** określona $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall h \in \mathbb{R}^n \quad \varphi(h) > 0$
 $h \neq 0$

(2) **ujemnie** określona $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall h \in \mathbb{R}^n \quad \varphi(h) < 0$
 $h \neq 0$

(3) **nieujemnie** określona $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall h \in \mathbb{R}^n \quad \varphi(h) \geq 0$
 $h \neq 0$

(4) **niedodatnio** określona $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall h \in \mathbb{R}^n \quad \varphi(h) \leq 0$
 $h \neq 0$

(5) **nieokreślona** $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \exists h_1 \in \mathbb{R}^n \quad \varphi(h_1) < 0 \wedge \exists h_2 \in \mathbb{R}^n \quad \varphi(h_2) > 0$

TW. (Sylvestra)

Zał: $A = [a_{ij}]_{j=1 \dots n}^{i=1 \dots n}$ - macierz formy kwadratowej φ

$$d_k = \det \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix} \quad k = 1, \dots, n$$

Teza:

1) $\forall k = 1, \dots, n \quad d_k > 0 \Rightarrow \varphi$ jest dodatnio określona $(+, +, +, \dots)$

2) $\forall k = 1, \dots, n \quad (-1)^k d_k > 0 \Rightarrow \varphi$ jest ujemnie określona $(-, +, -, +, \dots)$

3) $\forall k = 1, \dots, n \quad d_k \geq 0 \Rightarrow \varphi$ jest nieujemnie określona

4) $\forall k = 1, \dots, n \quad (-1)^k d_k \geq 0 \Rightarrow \varphi$ jest niedodatnio określona

5) jeśli nie zachodzi ani 3), ani 4), to φ jest nieokreślona

DEF. $f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad D \subset \mathbb{R}^n$

f jest dwukrotnie różniczkowalna w x_0

Macierzą formy kwadratowej związanej z drugą pochodną funkcji f w punkcie x_0 nazywamy

$$M(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 x_n}(x_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x_0) \end{bmatrix}$$

- macierz Hessego

TW. (WW na istnienie ekstremum lokalnego funkcji wielu zmiennych)

Zał: $f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad D \subset \mathbb{R}^n, \quad D$ - obszar, $x_0 \in U \subset D$

f jest $C^2(U)$ (tzn. że wszystkie pochodne cząstkowe 2-go rzędu są ciągłe w U)

f spełnia WK na istnienie ekstremum lokalnego w x_0 (tzn. $\forall i = 1, \dots, n \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0$)

Teza: [d_k odnosi się do macierzy formy kwadratowej związanej z 2-gą pochodną funkcji f czyli $M(x_0)$]

- 1) $\forall k = 1, \dots, n \quad d_k > 0 \Rightarrow f$ ma minimum lokalne w punkcie $x_0 \quad (+, +, +, \dots)$,
- 2) $\forall k = 1, \dots, n \quad (-1)^k d_k > 0 \Rightarrow f$ ma maksimum lokalne w punkcie $x_0 \quad (-, +, -, \dots)$,
- 3) jeśli forma kwadratowa jest nieokreślona w punkcie x_0 , to f nie ma ekstremum lokalnego w punkcie x_0

PRZ. $f(x, y) = x^2 + y^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2$$

$$M(x, y) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$M(0, 0) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad d_1 = \det[2] = 2 > 0$$

$$\Rightarrow f \text{ ma minimum lokalne w punkcie } (0, 0)$$

PRZ. $f(x, y) = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2 = x^3 + y^3 - (x + y)^2$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 2x - 2y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 2y - 2x$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x - 2y = 0 \\ 3y^2 - 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 - 2x - 2y = 0 \\ 3y^2 - 2x - 2y = 0 \end{cases}$$

$$3x^2 - 3y^2 = 0$$

$$(x - y)(x + y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 2x - 2y) = 6x - 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y - 2$$

$$M(x, y) = \begin{bmatrix} 6x - 2 & -2 \\ -2 & 6y - 2 \end{bmatrix}$$

$$M\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix} \quad d_1 = 6 > 0$$

$$\Rightarrow f \text{ ma minimum lokalne w punkcie } \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

$$\text{I. } x = y$$

$$3x^2 - 2x - 2x = 0$$

$$x(3x - 4) = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\text{II. } x = -y$$

$$3x^2 - 2x + 2x = 0$$

$$x^2 = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$M(0,0) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \quad d_1 = -2 \leq 0 \\ d_2 = 0 \geq 0$$

Z tego nie można wnioskować ani o istnieniu, ani o nieistnieniu ekstremum lokalnego w $(0,0)$.

Forma kwadratowa, która jest stowarzyszona z macierzą $M(0,0)$ jest niedodatnio określona więc funkcja f może mieć maksimum lokalne w punkcie $(0,0)$.

Ćw. dom. Uzasadnić, z definicji (ekstremum lokalnego), że f nie ma ekstremum lokalnego w punkcie $(0,0)$ pokazując, że dowolnym sąsiedztwie punktu $(0,0)$ są punkty, w których funkcja f przyjmuje wartości > 0 i < 0 .

PRZ. CD. $f(x,y) = x^3 + y^3 - x^2 - 2xy - y^2$

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - (x+y)^2$$

$$f(0,0) = 0$$

Pokazać, że w otoczeniu $(0,0)$ są punkty > 0 i < 0

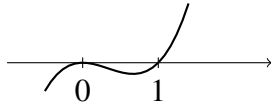
$$y = 0$$

$$f(x,0) = x^3 - x^2 = x^2(x-1)$$

$$y = x$$

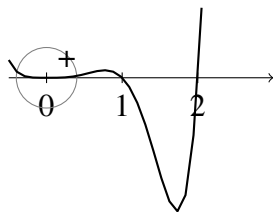
$$x^3 + x^3 - (2x)^2 = 2x^3 - 4x^2 = 2x^2(x-1)$$

z tego nic nie wynika



$$y = x^2 - x$$

$$\begin{aligned} f(x, x^2 - x) &= x^3 + (x^2 - x)^3 - (x + x^2 - x)^2 = x^3 + [x(x-1)]^3 - (x^2)^2 = x^3(x-1)^3 - x^4 = \\ &= x^3 + x^3(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - x^4 = x^3 + x^6 - 3x^5 + 3x^4 - x^4 - x^4 = x^6 - 3x^5 + 2x^4 = \\ &= x^4(x^2 - 3x + 2) = x^4(x-2)(x-1) \end{aligned}$$



Nie ma ekstremum lokalnego w $(0,0)$

EKSTREMA WARUNKOWE

PRZ. $f(x,y) = x + y$

$$x^2 + y^2 = 1$$

Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = x + y$ na zbiorze D (punktów spełniających warunek $x^2 + y^2 = 1$).

Zbiór D nie jest zbiorem otwartym w \mathbb{R}^2 więc nie da się tutaj zastosować podanych wcześniej definicji i twierdzeń dotyczących ekstremów lokalnych.

DEF. $f : D \rightarrow \mathbb{R} \quad D \subset \mathbb{R}^n$

warunek: $g : D' \rightarrow \mathbb{R} \quad D' \subset \mathbb{R}^n$

Zakładamy, że f jest klasy C^2 na D

oraz g jest klasy C^1 na D'

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\} \subset D$$

warunek $\subset D'$

Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ zwane ekstremami warunkowymi.

DEF. Mówimy, że funkcja f osiąga **maksimum lokalne warunkowe** w punkcie $x_0 \in S \stackrel{\text{def}}{\iff}$

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists U \subset D : \forall x \in U \cap S \quad f(x) \underset{(>)}{<} f(x_0)$$

Metoda Lagrange'a

Tworzymy funkcję Lagrange'a

$$L(x, \lambda) = f(x) + \lambda g(x), \quad x \in D \subset \mathbb{R}^n \\ \lambda \in \mathbb{R}$$

TW. (WK istnienia ekstremum warunkowego)

zał: f, g są klasy C^1 na odpowiednich zbiorach D, D'

f ma ekstremum warunkowe w punkcie $x_0 \in S$

$$\text{teza: } \begin{cases} \exists \lambda_0 \in \mathbb{R} : \forall i = 1, \dots, n \quad \frac{\partial L}{\partial x_i}(x_0, \lambda_0) = 0 \\ g(x_0) = 0 \end{cases}$$

DEF. Hesjan obrzeżony

$$H = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2}(x_0, \lambda_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0, \lambda_0) & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0, \lambda_0) \\ \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}(x_0, \lambda_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2}(x_0, \lambda_0) & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n}(x_0, \lambda_0) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0, \lambda_0) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_n}(x_0, \lambda_0) & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2}(x_0, \lambda_0) \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \det \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$$

$$H_K = \dots$$

\vdots

$$H_N = \dots$$

TW. (II WW na istnienie ekstremum warunkowego)

zał: $f \in C^2(D)$ oraz $g \in C^2(D')$

spełniony jest WK istnienia ekstremum warunkowego w punkcie $(x_0, \lambda_0), x_0 \in S$

teza:

1) $\forall k = 2, \dots, n \quad H_k < 0 \Rightarrow f$ ma minimum lokalne warunkowe w punkcie x_0

2) $\forall k = 2, \dots, n \quad (-1)^{k+1} H_k < 0 \Rightarrow f$ ma maksimum lokalne warunkowe w punkcie x_0

PRZ. $f(x, y) = x + y$

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x \quad \begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0 \\ 1 + 2\lambda y = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 1 + 2\lambda y \quad \begin{cases} x = -\frac{1}{2\lambda} \\ y = -\frac{1}{2\lambda} \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 - 1 = 0$$

$$2 \cdot \frac{1}{4\lambda^2} = 1$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} & \lambda_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\
\begin{cases} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} & & \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} & \\
\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right), & \lambda_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} & \\
\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), & \lambda_2 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} & \\
\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda & & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = 0 & \\
\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda & & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0 & \\
\frac{\partial g}{\partial x} = 2x & & \frac{\partial g}{\partial y} = 2y & \\
(x_2, y_2) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) & \lambda &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \\
H &= \begin{bmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \\
H_2 = \det H &= 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2} > 0 \\
\Rightarrow f &\text{ ma maksimum lokalne warunkowe w } \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)
\end{aligned}$$

PRZ. Wyznaczyć wartość największą i najmniejszą osiąganą przez funkcję $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ na zbiorze $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 100\}$.

I badamy wewnątrz zbioru V

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= 2x & \begin{cases} 2x = 0 \\ 4y = 0 \\ 6z = 0 \end{cases} & \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= 4y & & \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= 6z & & \\
f(0, 0, 0) &= 0 & &
\end{aligned}$$

II $x^2 + y^2 + z^2 = 100$

$$L(x, y, z, \lambda) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 100)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x} &= 2x + 2\lambda x & \begin{cases} 2x + 2\lambda x = 0 \\ 4y + 2\lambda y = 0 \\ 6z + 2\lambda z = 0 \end{cases} \\
\frac{\partial L}{\partial y} &= 4y + 2\lambda y & & \\
\frac{\partial L}{\partial z} &= 6z + 2\lambda z & \begin{cases} x(2 + 2\lambda) = 0 \\ y(4 + 2\lambda) = 0 \\ z(6 + 2\lambda) = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 100 \end{cases}
\end{aligned}$$

1. $x = 0$

$$\begin{aligned}
\text{1.1 } y &= 0 \\
0^2 + 0^2 + z^2 &= 100 \\
z &= 10 \quad \text{lub} \quad z = -10 \\
\lambda &= -3 \\
f(0, 0, 10) &= 300 \\
f(0, 0, -10) &= 300
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{1.2 } 2 + \lambda &= 0 \Leftrightarrow \lambda = -2 \\
z(3 - 2) &= 0 \\
z &= 0 \\
0^2 + y^2 + 0^2 &= 100
\end{aligned}$$

$$y = 10 \quad \vee \quad y = -10$$

$$f(0, 10, 0) = 200$$

$$f(0, -10, 0) = -200$$

$$2. \quad 1 + \lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$$

$$y(2 - 1) = 0 \Rightarrow y = 0$$

$$z(3 - 1) = 0 \Rightarrow z = 0$$

$$x^2 + 0^2 + 0^2 = 100$$

$$x = 10 \quad \vee \quad x = -10$$

$$f(10, 0, 0) = 100 \qquad f(0, 10, 0) = 200$$

$$f(-10, 0, 0) = 100 \qquad f(0, -10, 0) = 200$$

Odp. Największa wartość to 300, a najmniejsza to 0.

FUNKCJE UWIKŁANE

PRZ. $x^2 + y^2 = 1$

$$(x_0, y_0) = (0, 1)$$

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

PRZ. $x^2y - xy^2 = 0$

$$xy(x - y) = 0$$

PRZ. $xe^y - ye^x - e^{xy} = 0$

DEF. $F : D \rightarrow \mathbb{R} \quad D \subseteq \mathbb{R}^2$

$$F(x, y) = 0$$

$$(x_0, y_0) \in D : F(x_0, y_0) = 0$$

Jeżeli w otoczeniu punktu (x_0, y_0) istnieje funkcja $y : V \rightarrow W$ ($U \subset D \subset \mathbb{R}$)

$y = y(x)$ taka, że $\forall x \in V \quad F(x, y(x)) = 0$, to mówimy, że równanie $F(x, y) = 0$ można rozwiązać w otoczeniu punktu (x_0, y_0) .

Funkcję $y = y(x)$ nazywamy **funkcją uwikłaną** daną równaniem $F(x, y) = 0$.

TW. (WW na istnienie funkcji uwikłanej)

Zał: $F : D \rightarrow \mathbb{R} \quad D \subseteq \mathbb{R}^2$

$$F(x, y) = 0$$

$$F(x_0, y_0) = 0$$

U - otoczenie punktu (x_0, y_0)

$$F \in C^1(U)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

Teza: 1) istnieje takie otoczenie V punktu x_0 i takie otoczenie W punktu y_0 oraz istnieje taka funkcja $y : V \rightarrow W$, że $\forall x \in V \quad F(x, y(x)) = 0$,

(czyli istnieje funkcja uwikłana dana równaniem $F(x, y) = 0$ w otoczeniu punktu (x_0, y_0)).

2) Ponadto

$$y'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

PRZ. $xe^y - ye^x - e^{xy} = 0$

$$(x_0, y_0) = (1, 0)$$

$$F(x, y) = xe^y - ye^x - e^{xy}$$

$$F(1,0) = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= e^y - ye^x - e^{xy} \cdot y \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= xe^y - e^x - e^{xy} \cdot x \end{aligned} \right\} \text{funkcje ciągłe w } \mathbb{R}^2$$

$$F \in C^1(\mathbb{R}^2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(1,0) = 1 \cdot e^0 - e^1 - e^0 = -e \neq 0$$

$$y'(1) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(1,0)} = -\frac{e^0 - 0 - 0}{-e} = \frac{1}{e}$$

II sposób

$$xe^y - ye^x - e^{xy} = 0$$

$$y = y(x)$$

$$F(x, y(x)) = 0 \quad \forall x \in V$$

$$xe^{y(x)} - y(x)e^x - e^{xy(x)} = 0 \quad \forall x \in V \quad / \frac{\partial}{\partial x}$$

$$e^{y(x)} + xe^{y(x)}y'(x) - (y'(x) + y(x)e^x) - (e^{xy(x)}(y(x) + xy'(x))) = 0$$

$$y'(x)(xe^{y(x)} - 1 - e^{xy(x)} \cdot x) = -e^{y(x)} + y(x)e^x + e^{xy(x)} \cdot y(x)$$

$$y'(x) = \frac{-e^{y(x)} + y(x)e^x + e^{xy(x)}y(x)}{xe^{y(x)} - e^x - xe^{xy(x)}}$$

TW. (wzór na $y''(x_0)$ jeśli $y'(x_0) = 0$)

Zał: $F(x, y) = 0$

$$F : D \rightarrow \mathbb{R} \quad D \subset \mathbb{R}^2 \quad F(x_0, y_0) = 0$$

$$F \in C^2(U) \quad U - \text{otoczenie punktu } (x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \quad (y'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) = 0)$$

Teza: $y''(x_0) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$

PRZ. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji uwikłanej postaci $y = y(x)$ zadanej równaniem

$$x^3 + y^3 - 6xy = 0 \quad (*)$$

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 6xy$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3x^2 - 6y$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3y^2 - 6x$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6y = 0$$

$$y = \frac{1}{2}x^2$$

$y = \frac{1}{2}x^2$ wstawiamy do równania (*)

$$x^3 + \left(\frac{1}{2}x^2\right)^3 - 6x \cdot \frac{1}{2}x^2 = 0$$

$$x^3 + \frac{1}{8}x^6 - 3x^3 = 0$$

$$\frac{1}{8}x^6 - 2x^3 = 0$$

$$x^3(x^3 - 16) = 0$$

$$x^3 = 0 \quad \vee \quad x^3 = 16$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2} \\ y = \frac{1}{2}(2\sqrt[3]{2})^2 = 2\sqrt[3]{4} \end{cases}$$

$$x = 0, y = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) = 0 \rightarrow \text{nie wiemy, czy istnieje funkcja rozwikłująca}$$

$$x = 2\sqrt[3]{2}, y = 2\sqrt[3]{4}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(2\sqrt[3]{2}, 2\sqrt[3]{4}) = 3 \cdot (2\sqrt[3]{4})^2 - 6 \cdot 2\sqrt[3]{2} = 12\sqrt[3]{16} - 12\sqrt[3]{2} = 12(\sqrt[3]{16} - \sqrt[3]{2}) \neq 0$$

$$y''(x_0) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - 6y)$$

$$y''(x_0) = y''(2\sqrt[3]{2}) = -\frac{6 \cdot 2\sqrt[3]{2} > 0}{12(\sqrt[3]{6} - \sqrt[3]{2}) > 0} < 0$$

$\Rightarrow y = y(x)$ ma maksimum lokalne w punkcie $x_0 = 2\sqrt[3]{2}$ o wartości $y_0 = 2\sqrt[3]{4}$

TW. (przypomnienie o postaci macierzowej różniczki funkcji)

Zał: $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $x_0 = (x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$

f jest różniczkowalna w punkcie $x_0 \in U \subset D$

$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$

Teza: różniczka funkcji w punkcie x_0 ma postać

$$df(x_0)(h) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

DEF. Macierz $f'(x_0) = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right]_{j=1 \dots n}^{i=1 \dots m}$ nazywamy **macierzą Jacobiego** funkcji f w punkcie x_0 .

Jeśli $n = m$, to $J(x_0) = \det \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x_0) \right]_{j=1 \dots n}^{i=1 \dots m}$ nazywamy **jakobianem** funkcji f w punkcie x_0 .

PRZ. $f : (r, \varphi) \rightarrow (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$

$$D = [0, +\infty) \times \mathbb{R}$$

$$(r_0, \varphi) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}$$

$$f'(r, \varphi) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{bmatrix}$$

$$J(r, \varphi) = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r$$

TW. (o różniczkowalności funkcji złożonej)

Zał: $f : D \rightarrow \mathbb{R}^k$, $D \subset \mathbb{R}^n$

$g : E \rightarrow \mathbb{R}^m$, $E \subset \mathbb{R}^k$

$h = g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$

f jest różniczkowalna w $x_0 \in U \subset D$

g jest różniczkowalna w $f(x_0) = y_0 \in V \subset E$

Teza: funkcja złożona $g \circ f$ jest różniczkowalna w x_0 i $d(g \circ f)(x_0) = dg(y_0) \circ df(x_0)$

(złożenie odwzorowań liniowych)

TW. (wersja macierzowa tw. o różniczkowalności funkcji złożonej)

Zał: jak w tw. poprzednim

$$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_k(x_1, \dots, x_n))$$

$$g(y_1, \dots, y_k) = (g_1(y_1, \dots, y_k), \dots, g_m(y_1, \dots, y_k))$$

$$h(x_1, \dots, x_n) = (g \circ f)(x_1, \dots, x_n) = (h_1(x_1, \dots, x_n), \dots, h_m(x_1, \dots, x_n))$$

$$\begin{aligned} \text{Teza: } & \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial h_1}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial h_2}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial h_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial h_m}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix} = \\ & \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(y_0) & \frac{\partial g_1}{\partial y_2}(y_0) & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial y_k}(y_0) \\ \frac{\partial g_2}{\partial y_1}(y_0) & \frac{\partial g_2}{\partial y_2}(y_0) & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial y_k}(y_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial y_1}(y_0) & \frac{\partial g_m}{\partial y_2}(y_0) & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial y_k}(y_0) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(x_0) & \frac{\partial f_k}{\partial x_2}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(x_0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

PRZ. $f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2)$ $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $g(y_1, y_2) = y_1 y_2$ $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $h = g \circ f$

I sp.

$$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$h(x_1, x_2) = (g \circ f)(x_1, x_2) = g(f(x_1, x_2)) = g(x_1 - x_2, x_1 + x_2) = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = x_1^2 - x_2^2$$

$$h' = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & -2x_2 \end{bmatrix}$$

II sp.

$$h = \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} & \frac{\partial h}{\partial x_2} \end{bmatrix}$$

$$f' = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g' = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial y_1} & \frac{\partial g}{\partial y_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 & y_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} h' &= \begin{bmatrix} y_2 & y_1 \end{bmatrix} \Big|_{\substack{y_1 = x_1 - x_2 \\ y_2 = x_1 + x_2}} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + y_2, & -y_2 + y_1 \end{bmatrix} \Big|_{\substack{y_1 = x_1 - x_2 \\ y_2 = x_1 + x_2}} = \\ &= \begin{bmatrix} 2x_1, & -(x_1 + x_2) + x_1 - x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1, & -2x_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

PRZ. Rozwiązać równanie różniczkowe cząstkowe $z'_x = z'_y$, gdzie $z = z(x, y)$, przyjmując nowe zmienne

$$u = x + y \quad v = x - y.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial y} \quad (*)$$

$$z = z(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial z}{\partial y}(x, y) \quad \forall (x, y) \in D$$

$$z: (x, y) \rightarrow z(x, y) \in \mathbb{R}$$

$$f: (x, y) \rightarrow (u(x, y), v(x, y)) \in \mathbb{R}^2$$

$$g: (u, v) \rightarrow g(u, v)$$

$$z = g \circ f$$

$$z' = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$f' = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \quad g' = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial v} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}, & \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot 1 + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot (-1)$$

wstawiamy do równania (*)

$$\frac{\partial g'}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial g'}{\partial u} - \frac{\partial y}{\partial v}$$

$$2 \cdot \frac{\partial g}{\partial v} = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial v} = 0$$

$g(u, v) = \varphi(u)$, gdzie φ jest dowolną funkcją różniczkowalną jednej zmiennej

$$z(x, y) = (g \circ f)(x, y) = g(x+y, x-y) = \varphi(x+y)$$

$$z = \varphi(x+y).$$

CAŁKA PODWÓJNA PO PROSTOKĄCIE

P - prostokąt $\subset \mathbb{R}^2$

$f: P \rightarrow \mathbb{R}$

Tworzymy podział π_n prostokąta P na n małych prostokątów P_1, P_2, \dots, P_n .

δ_n - średnica podziału - długość najdłuższej przekątnej prostokątów P_1, P_2, \dots, P_n .

Tworzymy ciąg podziałów:

$\pi_1: P_1$

$\pi_2: P_1, P_2$

\vdots

$\pi_n: P_1, P_2, \dots, P_n$

Mówimy, że ciąg podziałów $(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ jest normalny $\stackrel{def}{\iff} \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$.

$\forall i = 1 \dots n$ wybieramy punkt pośredni $(c_i, d_i) \in P_i$

Tworzymy sumę całkową $S_n = \sum_{i=1}^n f(c_i, d_i) \cdot |P_i|$
pole prostokąta P_i

DEF. Jeśli dla dowolnego normalnego ciągu podziałów prostokąta P istnieje granica właściwa ciągu sum całkowych S_n i granica ta nie zależy ani od wyboru ciągu podziałów, ani od wyboru punktów pośrednich, to granicę tę nazywamy **całką podwójną funkcji f po prostokącie P** i oznaczamy symbolem

$$\iint_P f(x, y) dx dy (= \lim_{n \rightarrow \infty} S_n)$$

Mówimy wtedy, że f jest całkowna po prostokącie P .

TW. (WW na całkowność funkcji po prostokącie)

Jeżeli f jest ciągła na prostokącie P , to f jest całkowna po prostokącie P

TW. (Fubniego)

zał: $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$

$f: P \rightarrow \mathbb{R}$ całkowna na prostokącie P

teza:

$$1) [a_1, b_1] \ni x \rightarrow \varphi(x) = \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy$$

Funkcja $\varphi(x)$ jest funkcją całkowną w sensie Riemanna na przedziale $[a_1, b_1]$

$$2) \int_P f(x, y) dx dy = \int_{a_1}^{b_1} \left[\int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy \right] dx \left(= \int_{a_1}^{b_1} \varphi(x) dx = \int_{a_1}^{b_1} dx \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) dy \right)$$

CAŁKA PODWÓJNA PO OBSZARZE OGRANICZONYM

$D \subset \mathbb{R}^2 \ni P$ - prostokąt $D \subset P$
 \uparrow ograniczony

DEF. Funkcją charakterystyczną zbioru D nazywamy funkcję

$$\chi_D(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D \end{cases}$$

Uwaga. $f : P \rightarrow \mathbb{R}$

$$(f \cdot \chi_D)(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in D \\ 0, & (x,y) \notin D \end{cases}$$

DEF. Całką podwójną funkcji f po zbiorze ograniczonym D nazywamy

$$\iint_D f(x,y) dx dy \stackrel{\text{def}}{=} \iint_P (f \chi_D)(x,y) dx dy$$

DEF. Obszarem normalnym względem osi OX nazywamy obszar $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b], \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$,
gdzie $\varphi, \psi : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe

PRZ. $K((0,0),R)$ jest obszarem normalnym względem osi OX .

Uwaga. Analogicznie definiujemy obszar normalny względem osi OY

PRZ. Obszar normalny względem osi OX , ale nie względem osi OY

TW. (o zamianie całki podwójnej na całkę iterowaną dla obszaru normalnego względem osi OX)

Zał: $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b], \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$, $\varphi, \psi : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ ciągłe
 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła

$$\text{Teza: } \iint_D f(x,y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y) dy \right) dx \left(= \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y) dy \right)$$

PRZ. $\iint_D e^{\frac{x}{y}} dx dy$, gdzie $D : \begin{cases} y = \sqrt{x} \\ x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

I podejście

$$D = \{(x,y) : x \in [0,1], \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

$$\iint_D e^{\frac{x}{y}} dx dy = \int_0^1 dx \int_{\sqrt{x}}^1 e^{\frac{x}{y}} dy = ?$$

$$\int e^{\frac{x}{y}} dx = \left| \begin{array}{l} t = \frac{x}{y} \\ dt = -\frac{x}{y^2} dx \end{array} \right| = \int -x \frac{e^t}{t^2} dt$$

II podejście

$$D = \{(x,y) : y \in [0,1], \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$$

$$\iint_D e^{\frac{x}{y}} dx dy = \int_0^1 dy \int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}} dx = \int_0^1 dy \left[ye^{\frac{x}{y}} \right]_0^{y^2} = \int_0^1 dy (ye^y - y) = \dots$$

TW. Izał: $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ całkowalne D - obszar normalny względem jednej z osi

$$\text{teza: } \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \iint_D (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(x, y) dx dy = \alpha \iint_D f(x, y) dx dy + \beta \iint_D g(x, y) dx dy$$

TW. IIzał: D_1, D_2 - obszary normalne względem jednej z osi

$$\text{int } D_1 \cap \text{int } D_2 = \emptyset$$

 $f : D_1 \cup D_2 \rightarrow \mathbb{R}$ całkowalna

$$\text{teza: } \iint_{D_1 \cup D_2} f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$$

DEF. Obszar D nazywamy **obszarem regularnym** $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow}$

1) $D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$

2) $\forall i = 1, \dots, n$ D_i - obszar regularny względem jednej z osi

3) $\forall i, j \in \{1, \dots, n\}$ $i \neq j \Rightarrow \text{int } D_i \cap \text{int } D_j = \emptyset$

TW. Jeśli $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła i D - obszar regularny, to f jest całkowalna na D i zachodzi wzór:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} f(x, y) dx dy$$

TW. (o zamianie zmiennych w całce podwójnej)zał: $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła D - regularny

$\Phi : D' \rightarrow D$

 Φ przeprowadza $\text{int } D'$ na $\text{int } D$

$D' \ni (u, v) \rightarrow \Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v)) \in D$

 $\Phi'(u, v)$ - macierz Jacobiego funkcji Φ

$J(u, v) = \det \Phi'(u, v)$ - jacobian

$\forall (u, v) \in \text{int } D' \quad J(u, v) \neq 0$

$$\text{teza: } \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x(u, v), y(u, v)) \cdot |J(u, v)| du dv$$

WSPÓŁRZĘDNE BIEGUNOWE

$x = x(r, \varphi) = r \cos \varphi$

$y = y(r, \varphi) = r \sin \varphi$

PRZ. $D = \left\{ (x, y) : x \in [0, R], 0 \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2} \right\}$

$r \in [0, R], \quad \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$D' = \left\{ (r, \varphi) : r \in [0, R], \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}] \right\}$

(wykres)

$\Phi : (r, \varphi) \rightarrow (r \cos \varphi, r \sin \varphi)$

$J(r, \varphi) = r$

TW. (o przejściu na współrzędne biegunowe w całce podwójnej)

$$\text{zał: } \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}$$

$$D' = \{(r, \varphi), r \in \dots, \varphi \in \dots\}$$

$$D = \{(x, y), \dots\}$$

$$\Phi: D' \ni (r, \varphi) \longrightarrow (x, y) \in D$$

$$\Phi: D' \rightarrow D$$

$$f: D \rightarrow \mathbb{R} \text{ ciągła}$$

$$\text{teza: } \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r dr d\varphi$$

PRZ. $\iint_D y dx dy$, gdzie D - ćwiartka koła o promieniu R w I ćw. układu współrzędnych

$$D' = \{(r, \varphi) : r \in [0, R], \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$$

$$\begin{aligned} \iint_D y dx dy &= \iint_{D'} r \sin \varphi \cdot r dr d\varphi = \int_0^R dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sin \varphi d\varphi = \int_0^R r^2 dx [-\cos \varphi]_0^{\frac{\pi}{2}} = \\ &= \int_0^R r^2 dr \left(-\cos \frac{\pi}{2} - (-\cos 0)\right) = \int_0^R r^2 dr (0 + 1) = \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R = \frac{R^3}{3} \end{aligned}$$

TW. (o interpretacji geometrycznej całki podwójnej)

zał: D - regularny

$$f: D \rightarrow \mathbb{R}_+ \text{ ciągła}$$

teza: objętość bryły $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq f(x, y)\}$ jest równa

$$|V| = \iint_D f(x, y) dx dy$$

TW. (wzór na objętość obszaru)

$$\text{zał: } V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$$

gdzie D - obszar regularny

$$\varphi, \psi: D \rightarrow \mathbb{R} \text{ ciągłe}$$

$$\text{teza: } |V| = \iint_D [\psi(x, y) - \varphi(x, y)] dx dy$$

PRZ. Oblicz objętość bryły ograniczonej powierzchniami $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ oraz $z = 2 - x^2 - y^2$.

$$z = 2 - x^2 - y^2 = 2 - (x^2 + y^2)$$

$$\psi(x, y) = 2 - x^2 - y^2$$

$$\varphi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2} \\ z = 2 - (x^2 + y^2) \end{cases}$$

$$z = 2 - (x^2 + y^2)$$

$$z = 2 - z^2$$

$$z^2 + z - 2 = 0$$

$$\Delta = 1 + 8 = 9$$

$$z_1 = -2 \quad z_2 = 1$$

$$1 = \sqrt{x^2 + y^2} \quad | \quad ()^2$$

$$1 = x^2 + y^2$$

$$D = K((0,0),1)$$

$$|V| = \iint_D \left[(2 - x^2 - y^2) - \sqrt{x^2 + y^2} \right] dx dy = \left. \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ |J| = r \\ r \in [0, 1] \\ \varphi \in [0, 2] \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} [2 - r^2 - r] r d\varphi = \int_0^1 (2r - r^3 - r^2) dr \cdot 2\pi = 2\pi \left[r^2 - \frac{1}{4}r^4 - \frac{1}{3}r^3 \right]_0^1 = \dots$$

Zastosowanie całki podwójnej w fizyce

D - obszar regularny

- Pole powierzchni obszaru D : $|D| = \iint_D dx dy$
 $\rho : D \rightarrow \mathbb{R}_+$ gęstość powierzchniowa masy, ładunku elektrycznego, ...
- Masa obszaru D : $M = \iint_D \rho(x,y) dx dy$
- Moment statyczny względem osi OX obszaru D
 $M_{OX} = \iint_D y \rho(x,y) dx dy$
względem osi OY
 $M_{OY} = \iint_D x \rho(x,y) dx dy$
- Środek ciężkości obszaru D
 $\begin{cases} x_0 = \frac{M_{OY}}{M} \\ y_0 = \frac{M_{OX}}{M} \end{cases}$
- Moment bezwładności względem punktu $(0,0)$ obszaru D
 $M_B = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x,y) dx dy$

PRZ. Obliczyć współrzędne środka ciężkości jednorodnej ćwiartki koła o promieniu R .

$$\rho(x,y) = \rho$$

$$x_0 = y_0$$

$$M_{OX} = \iint_D \rho y dx dy = \frac{R^3}{3} \rho$$

$$M = \iint_D \rho dx dy = \rho \iint_D dx dy = \rho \cdot |D| = \rho \cdot \frac{1}{4} \pi R^2$$

$$y_0 = \frac{M_{OX}}{M} = \frac{\frac{R^3}{3} \rho}{\rho \cdot \frac{1}{4} \pi R^2} = \frac{4}{3\pi} R.$$

PRZ. Obliczyć moment bezwładności jednorodnego koła o promieniu R względem punktu leżącego na brzegu tego koła.

$$M_B = \iint_D (x^2 + y^2) \rho dx dy = *$$

1. sposób

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$(x - R)^2 + y^2 = R^2$$

$$x^2 - 2Rx + R^2 + y^2 = R^2$$

$$r^2 \cos^2 \varphi - 2Rr \cos \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = 0$$

$$r^2 - 2Rr \cos \varphi = 0$$

$$r(r - 2R \cos \varphi) = 0$$

$$r = 0 \quad \vee \quad r = 2R \cos \varphi$$

$$r \in [0, 2R \cos \varphi]$$

$$\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$* = \rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2R \cos \varphi} r^2 \cdot r dr = \rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{2R \cos \varphi} = \rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 16r^4 \cos^4 \varphi d\varphi = \dots$$

2. sposób

$$x = r \cos \varphi + R$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$(x - R)^2 + y^2 = R^2$$

$$r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = R^2$$

$$r^2 - R^2 = 0$$

$$r = R$$

$$r \in [0, R] \quad \varphi \in [0, 2\pi]$$

r nie zależy od φ , ani φ od r , więc kolejność jest dowolna

$$\begin{aligned} * &= \rho \int_0^R dr \int_0^{2\pi} (r^2 \cos^2 \varphi + 2Rr \cos \varphi + R^2 + r^2 \sin^2 \varphi) \cdot r d\varphi = \\ &= \rho \int_0^R dr \int_0^{2\pi} (r^3 + 2Rr^2 \cos \varphi + R^2 r) d\varphi = \\ &= \rho \int_0^R dr [r^3 \varphi + 2Rr^2 \sin \varphi + R^2 r \varphi]_0^{2\pi} = \\ &= \rho \int_0^R [2\pi r^3 + 2Rr^2 \sin 2\pi + R^2 r^2 \pi - (0 + 0 + 0)] dr = \\ &= \rho \int_0^R (2\pi r^3 + R^2 r^2 \pi) dr = \dots \end{aligned}$$

CAŁKA POTRÓJNA

Całka potrójna po prostopadłościanie

$$P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$$

- Tworzymy ciąg podziałów prostopadłościanu P
Podział prostopadłościanu P : dzielimy prostopadłościan P na n mniejszych prostopadłościanów P_1, P_2, \dots, P_n
- $\forall i = 1, \dots, n \quad (c_i, d_i, e_i) \in P_i$
punkt pośredni
- Ciąg podziałów nazywamy normalnym, jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ ($\delta_n = \max\{\text{dł. przekątnej } P_i, i = 1, \dots, n\}$)

- $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ funkcja trzech zmiennych

- Tworzymy sumy całkowite $S_n = \sum_{i=1}^n f(c_i, d_i, e_i) \cdot |P_i|$
 \uparrow
 objętość prostopadłościanu P_i

DEF. $\iiint_P f(x, y, z) dx dy dz \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$

o ile ta granica nie zależy ani od wyboru ciągu podziałów normalnych, ani wyboru punktów pośrednich.

\uparrow

całka potrójna po prostopadłościanie P funkcji f .

DEF. D - obszar ograniczony $\subset \mathbb{R}^3$

$\exists P$ - prostopadłościan taki, że $D \subseteq P$

$$\iiint_D f(x, y, z) dV \stackrel{\text{def}}{=} \iiint_P (f \cdot \chi_D)(x, y, z) dV$$

\uparrow
funkcja charakterystyczna

DEF. Obszarem normalnym względem płaszczyzny OXY nazywamy zbiór

$\{(x, y, z) : (x, y) \in D, \Phi(x, y) \leq z \leq \Psi(x, y)\}$,

gdzie D jest obszarem regularnym $\subset \mathbb{R}^2$,

$\phi, \psi : D \rightarrow \mathbb{R}$ ciągłe

TW. (całka iterowana dla obszaru normalnego względem płaszczyzny OXY)

zał: V - obszar normalny względem płaszczyzny OXY

$f : V \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła

teza:
$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{\Phi(x, y)}^{\Psi(x, y)} f(x, y, z) dz$$

Jeśli ponadto obszar D jest regularny względem osi OX , to:

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \int_a^b dx \int_{\phi(x)}^{\psi(x)} dy \int_{\Phi(x, y)}^{\Psi(x, y)} f(x, y, z) dz$$

PRZ. $\iiint_V x dV$, gdzie V jest ograniczony płaszczyznami $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$.

1. Rzutujemy obszar V na płaszczyznę OXY

2. $z = 0 \quad \Phi(x, y) = 0$

$\Psi(x, y) = 1 - x - y$

$$\iiint_V x dV = \iint_D dx dy \int_0^{1-x-y} x dz = *$$

3. $y = \psi(x) = 1 - x$

$y = \phi(x) = 0$

$$* = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} x dz = \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} dy [z]_0^{1-x-y} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (1-x-y-0)dy = \int_0^1 x dx [y - xy - \frac{1}{2}y^2]_0^{1-x} = \\
&= \int_0^1 dx [1-x-x(1-x) - \frac{1}{2}(1-x)^2] = \\
&= \int_0^1 x dx [1-2x+x^2 - \frac{1}{2} + x - \frac{1}{2}x^2] = \dots
\end{aligned}$$

DEF. Obszarem regularnym (w \mathbb{R}^3) nazywamy sumę skończonej liczby obszarów normalnych względem pewnej płaszczyzny (OXY, OXZ, OYZ)

$$V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_n, \quad \text{int}V_i \cap \text{int}V_j \neq \emptyset \quad \forall_{\substack{i,j \\ i \neq j}}$$

Współrzędne sferyczne

Wybieramy jeden z kątów θ, ψ

θ	ψ
$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$	$\begin{cases} x = r \cos \psi \cos \varphi \\ y = r \cos \psi \sin \varphi \\ z = r \sin \psi \end{cases}$
$r \geq 0,$	$r \geq 0,$
$\varphi \in [0, 2\pi],$	$\varphi \in [0, 2\pi]$
$\theta \in [0, \pi]$	$\psi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
$ J = r^2 \sin \theta$	$ J = r^2 \cos \varphi$

Wzór na przejście na współrzędne sferyczne w całce potrójnej:

$$\iiint_V f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) \cdot r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

analogiczny wzór dla ψ

Zastosowanie całki potrójnej

- Objętość bryły V : $|V| = \iiint_V dV$
 $\rho : V \rightarrow \mathbb{R}_+$ gęstość masy, ładunku elektrycznego, ...

- Masa bryły V : $M = \iiint_V \rho(x,y,z) dx dy dz$

- Momenty statyczne bryły V względem płaszczyzn:

$$M_{OXY} = \iiint_V z \cdot \rho(x,y,z) dV$$

$$M_{OYZ} = \iiint_V x \cdot \rho(x,y,z) dV$$

$$M_{OXZ} = \iiint_V y \cdot \rho(x,y,z) dV$$

- Środek ciężkości bryły V
 $x_0 = \frac{M_{OYZ}}{M} \quad y_0 = \frac{M_{OXZ}}{M} \quad z_0 = \frac{M_{OXY}}{M}$

- Moment bezwładności bryły V względem osi OZ

$$M_{B(OZ)} = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dV$$

PRZ. Obliczyć moment bezwładności jednorodnej kuli o promieniu R i masie M względem osi zawierającej średnicę tej kuli.

$$M_B = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho dV \stackrel{\text{dla } \psi}{=} \left. \begin{array}{l} x = r \cos \psi \cos \varphi \\ y = r \cos \psi \sin \varphi \\ z = r \sin \psi \\ |J| = r^2 \cos \psi \\ r \in [0, R] \\ \varphi \in [0, 2\pi] \\ \psi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{array} \right|$$

$$= \rho \int_0^R dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 \cos^2 \psi \cdot r^2 \cos \psi d\psi = \rho \int_0^R r^4 dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \psi d\psi =$$

$$= \rho \frac{1}{5} R^5 \cdot 2\pi \left[\sin \psi - \frac{1}{3} \sin^3 \psi \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \rho \frac{2\pi}{5} R^5 \left[\left(1 - \frac{1}{3} - 1 - 1 + \frac{1}{3}\right) \right] = \rho \frac{2}{5} \pi R^5 \frac{4}{3} = \frac{8}{15} \rho \pi R^5 =$$

$$= |M = \rho \cdot |V| = \rho \cdot \frac{4}{3} \pi R^3| = \frac{2}{5} MR^2.$$

Całka niewłaściwa wielokrotna (podwójna, potrójna)

$D \subseteq \mathbb{R}^2$ (lub w \mathbb{R}^3)

D - nieograniczony lub f nie jest ograniczona na D ($\rightarrow \pm\infty$)

- Tworzymy ciąg zbiorów $D_1, D_2, \dots, D_n, \dots$

$\forall i$ D_i - regularny

$\forall i$ $D_i \subset D_{i+1}$ („ciąg wstępujący”)

$$D = \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i$$

$\forall i$ $f: D_i \rightarrow \mathbb{R}$ całkowna

DEF. $\int_D \dots \int f(x, \dots) dx \dots \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{D_n} \dots \int f(x, \dots) dx \dots$

PRZ. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = ?$, $f(x) = e^{-x^2}$ - funkcja gęstości w rozkładzie normalnym Gaussa

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = |D = K((0,0), R)| = \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{K((0,0), R)} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \left. \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ r \in [0, R] \\ \varphi \in [0, 2\pi] \\ |J| = r \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R dr \int_0^{2\pi} e^{-r^2} \cdot r d\varphi = 2\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R r e^{-r^2} dr = 2\pi \lim_{R \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^R = 2\pi \lim_{R \rightarrow +\infty} \left[-\frac{1}{2} e^{-R^2} + \frac{1}{2} \right] =$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{2} = \pi$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Całka krzywoliniowa nieskierowana

DEF. Łuk gładki $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), t \in [\alpha, \beta] \end{cases}$
 $x(t), y(t) \in C^1([\alpha, \beta])$
 $\forall t \in [\alpha, \beta] \quad [x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 > 0$

DEF. • Tworzymy podziały

$$\begin{array}{ccccccc} t_0 & < & t_1 & < & t_2 & < & \dots & < & t_n \\ \parallel & & & & & & & & \parallel \\ \alpha & & & & & & & & \beta \end{array}$$

• Średnica podziału

$$\delta_n = \max\{t_i - t_{i-1} : i = 1, \dots, n\}$$

• Ciąg podziałów nazywamy normalnym $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$

• $\forall i = 1, \dots, n, c_i \in [t_{i-1}, t_i]$ - punkt pośredni

• $f : L \rightarrow \mathbb{R}$

• Suma całkowana

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n f(x(c_i), y(c_i)) \cdot \overset{\text{długość łuku}}{|A_{i-1}A_i|} = \\ &= \sum_{i=1}^n f(x(c_i), y(c_i)) \cdot \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt \end{aligned}$$

DEF. Całką krzywoliniową nieskierowaną funkcji f po łuku L nazywamy

$$\int_L f(x, y) dl \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\delta_n \rightarrow 0)}} S_n,$$

o ile ta granica nie zależy ani od wyboru ciągu podziałów normalnych, ani od wyboru punktów pośrednich w przedziałach.

TW. Zał: L - łuk gładki (zadany parametrycznie przez $x(t), y(t)$)

$f : L \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła

$$\text{Teza: } \int_L f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$$

TW. Zał: L - łuk gładki (zadany w sposób jawny $y = y(x), x \in [a, b]$)

$y(x) \in C^1([a, b])$

$f : L \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła

$$\text{Teza: } \int_L f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \cdot \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx$$

DEF. Krzywa regularna jest sumą skończonej liczby łuków gładkich

$$K = L_1 \cup L_2 \cup \dots \cup L_n.$$

DEF. Jeżeli K - krzywa regularna, to $\int_K f(x,y)dl \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \int_{L_i} f(x,y)dl$

Zastosowania całki krzywoliniowej nieskierowanej

- Długość łuku: $|L| = \int_L dl$
- Masa łuku: $M = \int_L \rho(x,y)dl$
- Momenty statyczne: $M_{OX} = \int_L y\rho(x,y)dl$
 $M_{OY} = \int_L x\rho(x,y)dl$
- Środek ciężkości: $x_0 = \frac{M_{OY}}{M}$ $y_0 = \frac{M_{OX}}{M}$
- Moment bezwładności względem punktu $(0, 0)$: $M_B = \int_L (x^2 + y^2)\rho(x,y)dl$

Analogiczne wzory dla całki krzywoliniowej po krzywej $L \subset \mathbb{R}^3$

TW. Zał: L - łuk gładki (zadany parametrycznie przez $x(t), y(t), z(t)$)
 $f: L \rightarrow \mathbb{R}$ ciągła

Teza: $\int_L f(x,y,z)dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt.$

PRZ. Wyznaczyć środek ciężkości jednorodnego półokręgu o promieniu R .

$$\rho(x,y) = \rho$$

$$M = \int_L \rho dl = \rho \int_L dl = \rho |L| = \rho \pi R$$

$$x_0 = 0 \quad y_0 = ?$$

$$M_{OX} = \int_L y\rho dl = \rho \int_L dl = \left. \begin{array}{l} \text{I sp.} \\ x \in [-R, R] \\ y = y(x) = \sqrt{R^2 - x^2} \\ \text{II sp.} \\ x = R \cos t \\ y = R \sin t \\ t \in [0, \pi] \end{array} \right| =$$

$$= \rho \int_0^{\pi} R \sin t \sqrt{(-R \sin t)^2 + (R \cos t)^2} dt = \rho \int_0^{\pi} R \sin t \cdot R dt = \rho R^2 \int_0^{\pi} \sin t dt =$$

$$= \rho R^2 [-\cos t]_0^{\pi} = \rho \cdot R^2 [-\cos \pi + \cos 0] = 2\rho R^2$$

$$y_0 = \frac{M_{OX}}{M} = \frac{2\rho R^2}{\rho \pi R} = \frac{2}{\pi} R$$

CAŁKA KRZYWOLINIOWA SKIEROWANA

L - łuk gładki

$$\vec{F}: L \rightarrow \mathbb{R}^2$$

pole wektorowe
 $\vec{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$

- Tworzymy ciąg podziałów normalnych

$$\begin{array}{ccc} t_0 < t_1 < \dots < t_n \\ \parallel & & \parallel \\ \alpha & & \beta \end{array}$$

- $\forall i = 1, \dots, n \ c_i \in [t_{i-1}, t_i]$

- Tworzymy sumę całkową

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{i=1}^n \overrightarrow{(P(x(c_i), y(c_i)), Q(x(c_i), y(c_i)))} \circ \overrightarrow{A_{i-1}A_i} = \\ &= \sum_{i=1}^n [P(x(c_i), y(c_i)) \cdot (x(t_i) - x(t_{i-1})) + Q(x(c_i), y(c_i)) \cdot (y(t_i) - y(t_{i-1}))] \end{aligned}$$

DEF. Całką krzywoliniową skierowaną funkcji wektorowej $\vec{F} = (P, Q)$ po łuku L nazywamy

$$\int_L \vec{F} \circ d\vec{r} = \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\delta_n \rightarrow 0)}} S_n$$

(o ile ta granica nie zależy ani od wyboru ciągu podziałów normalnych, ani od wyboru punktów pośrednich).

TW. Zał: L - łuk gładki

$$\vec{F} = (P, Q)$$

$P, Q: L \rightarrow \mathbb{R}$ ciągłe

$$\text{Teza: } \int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t)] dt$$

TW. Zał: K - krzywa regularna

$-K$ - ta sama krzywa regularna o przeciwnej orientacji

$$\text{Teza: } \int_{-K} Pdx + Qdy = - \int_K Pdx + Qdy$$

DEF. Jeśli K - krzywa regularna, to

$$\int_K Pdx + Qdy = \sum_{i=1}^n \int_{L_i} Pdx + Qdy$$

Analogicznie wprowadza się definicję całki krzywoliniowej po krzywej $L \subset \mathbb{R}^3$ (i wzór na jej obliczenie jest analogiczny).

PRZ. Oblicz $\int_L x dx + y dy + z dz$, gdzie L jest odcinkiem od punktu $A(1, 1, 1)$ do $B(2, 3, 4)$.

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + t(2 - 1, 3 - 1, 4 - 1)$$

$$\begin{cases} x = 1 + t & \text{dla } A \downarrow \text{ dla } B \\ y = 1 + 2t & t \in [0, 1] \\ z = 1 + 3t \end{cases}$$

$$\int_L P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} [P(x(t), y(t), z(t)) \cdot x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot y'(t) + R(x(t), y(t), z(t)) \cdot z'(t)] dt =$$

$$= \int_0^1 [(1+t) \cdot 1 + (1+2t) \cdot 2 + (1+3t) \cdot 3] dt = \dots$$

Przypomnienie: D - obszar (otwarty i spójny zbiór)

∂D - brzeg obszaru D

DEF. Obszar D nazywamy obszarem **obszarem jednospójnym** $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ gdy wewnątrz każdej krzywej zamkniętej (bez punktów wielokrotnych) zawartej w D zawiera się w obszarze D .

TW. Jeśli obszar D jest obszarem jednospójnym ograniczonym, to brzeg obszaru D jest krzywą Jordana (tzn. krzywą zamkniętą bez punktów wielokrotnych).

DEF. Brzeg obszaru jednospójnego ograniczonego D nazywamy **zorientowanym dodatnio** względem tego obszaru $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ gdy poruszając się po tym brzegu zgodnie z wybraną orientacją obszar D znajduje się po lewej stronie.

PRZ. Orientacja dodatnia a obieg zgodny z ruchem wskazówek zegara.

TW. (Greena)

Zał: D - obszar jednospójny ograniczony

$$\vec{F} = (P, Q)$$

$$P, Q \in C^1(D \cup \partial D),$$

∂D - jest zorientowany dodatnio względem obszaru D

$$\text{Teza: } \oint_{\partial D} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \right) dx dy$$

PRZ. Oblicz $\int_L y^2 dx - x^2 dy$, gdzie $L: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ zorientowany zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

$$P(x, y) = y^2$$

$$Q(x, y) = -x^2$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -2x$$

$$\int_L y^2 dx - x^2 dy = \overset{\text{ujemnie}}{\downarrow} \iint_D (-2x - 2y) dx dy = 2 \iint_D (x + y) dx dy =$$

$$= 2 \iint_D (x + y) dx dy = \left| \begin{array}{l} x = r \cos \varphi + 1 \\ y = r \sin \varphi + 1 \\ \varphi \in [0, 2\pi] \\ r \in [0, 1] \end{array} \right| =$$

$$= 2 \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} (r \cos \varphi + r \sin \varphi + 2) r d\varphi = \dots$$

TW. Zał: K - krzywa regularna

$-K$ - ta sama krzywa regularna o przeciwnej orientacji

$$\text{Teza: } \int_{-K} P dx + Q dy = - \int_K P dx + Q dy$$

DEF. Mówimy, że pole wektorowe $\vec{F} = (P, Q)$ jest **polem potencjalnym** w obszarze D $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ gdy istnieje taka funkcja różniczkowalna $u: D \rightarrow \mathbb{R}$, że

$$du = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

$$\text{(tzn } \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = P(x, y), \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = Q(x, y) \forall (x, y) \in D)$$

Funkcję $u(x, y)$ nazywamy **potencjałem pola wektorowego** $\vec{F} = (P, Q)$ na obszarze D .

TW. (WKW na potencjalność pola płaskiego)

Zał: $\vec{F} = (P, Q) \in C^1(D)$

D - obszar jednospójny

Teza: pole \vec{F} jest potencjalne w $D \Leftrightarrow \forall (x, y) \in D : \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y)$

te same pochodne cząstkowe co w tw. Greena

TW. (o niezależności całki krzywoliniowej od krzywej w polu potencjalnym)

Zał: $\vec{F} = (P, Q) \in C^1(D)$

D - obszar jednospójny

Teza: całka krzywoliniowa skierowana nie zależy od kształtu krzywej regularnej $K \subset D$ w polu potencjalnym ale tylko od położenia końców tej krzywej.

Ponadto zachodzi wzór: $\int_{\overline{AB}} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = u(B) - u(A)$,

gdzie $K = \overline{AB}$ oraz u jest potencjałem pola wektorowego w D .

TW. Całka krzywoliniowa skierowana po dowolnej krzywej regularnej zamkniętej zawartej w obszarze D , w którym pole wektorowe jest potencjalne jest równa 0.

PRZ. Oblicz

Oblicz $\int_K 2xydx + (x^2 - y^2)dy = *$, gdzie $K : \begin{cases} x = t^5 \arctan t \\ y = \arcsin t \\ \text{od } A(0, 0) \text{ do } B(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}) \end{cases}$

$t = 0 \quad x(0) = 0^5 \cdot \arctan 0$
 $y(0) = \arcsin 0$

$t = 1 \quad x(1) = 1^5 \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$
 $y(1) = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$

I sposób

$$* = \int_0^1 \left[2 \cdot t^5 \arctan t \cdot \arcsin t \cdot (t^5 \cdot \arctan t)' - (\arcsin^2 t' - t^{10} \arctan^2 t) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \right] dt = \dots$$

II sposób

$P(x, y) = 2xy \quad Q(x, y) = y^2 - x^2$

$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 2x$

$\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
 \parallel
 D jednospójny

z tw WKW \Rightarrow pole $\vec{F} = (P, Q)$ jest potencjalne w \mathbb{R}^2

$P(x, y) = 2xy \quad Q(x, y) = x^2 - y^2$

$\frac{\partial u}{\partial x} = P(x, y) \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q(x, y)$

$u = \int P(x, y)dx = \int 2xydx = 2y \int xdx = 2y \cdot \frac{1}{2}x^2 + C(y) = x^2y + C(y)$

$\frac{\partial}{\partial y}(x^2y + C(y)) = Q(x, y)$

$x^2 + C'(y) = x^2 - y^2$

$C'(y) = -y^2$

$$C(y) = \int C'(y)dy = \int -y^2 dy = -\frac{1}{3}y^3 + C$$

$$u = u(x, y) = x^2 y - \frac{1}{3}y^3 + C$$

$$\begin{aligned} * &= u\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right) - u(0, 0) = \\ &= \left(\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{2} - \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + C\right) - (0 - 0 + C) = \frac{\pi^3}{32} - \frac{\pi^3}{24} = -\pi^3 \cdot \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) = -\frac{\pi^3}{96} \end{aligned}$$

III sposób

Pokazaliśmy już wcześniej, że $\vec{F} = (P, Q)$ jest potencjalne w \mathbb{R}^2

$$\begin{aligned} * &= \int_{AB} 2xy dx + (x^2 - y^2) dy = \left. \begin{array}{l} x = t \\ y = 2t \\ t \in [0, \frac{\pi}{4}] \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{4}} [2t \cdot 2t \cdot (t)' + (t^2 - 4t^2)(2t)'] dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 4t^2 - 6t^2 dt = -2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} t^2 dt = -2 \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{2}{3} \left(\frac{\pi}{4}\right)^3 = -\frac{2}{3} \cdot \frac{\pi^3}{16 \cdot 4} = -\frac{\pi^3}{96} \end{aligned}$$

PRZ. Obliczyć całkę krzywoliniową skierowaną pola wektorowego $\vec{F} = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2}\right)$ po okręgu

$x^2 + y^2 = 1$ skierowanym dodatnio.

I sposób (zły sposób)

$$P(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2} \quad Q(x, y) = \frac{-x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\left(\frac{x^2+y^2-2x \cdot x}{(x^2+y^2)^2}\right) = -\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

pole jest potencjalne

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{x^2+y^2-2y \cdot y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \not\Rightarrow$$

$$\not\Rightarrow \int_K \frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{-x}{x^2+y^2} dy \stackrel{*}{=} 0$$

bo $(0, 0) \notin D$

II sposób

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \quad t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

$$* = \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin t}{1} (-\sin t) + \frac{-\cos t}{1} \cdot \cos t \right) dt = - \int_0^{2\pi} dt = -[t]_0^{2\pi} = -2\pi$$