I termin

1. Podaj definicję wypukłości funkcji dla funkcji różniczkowalnej w (a, b).
Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia będącego warunkiem wystarczającym na wypukłość funkcji w (a, b) i udowodnij to twierdzenie. Podaj dokładną wypowiedź dwóch twierdzeń, z których skorzystałeś w tym dowodzie.

2. Sprawdź, dla jakich wartości x prawdziwa jest równość $2\operatorname{arctg} x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \pi$.
Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia z którego skorzystałeś.

3. Wyznacz wymiary prostokąta o największym polu wpisanego w elipsę $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

4. Wyznacz funkcję $\phi(x) = \int\limits_{]-\infty, x]} f(t)dt$, jeśli $f(x) = \begin{cases} e^x \cos^2 x, & x \leqslant 0 \\ \sqrt{1+x^2}, & x > 0. \end{cases}$

Czy funkcja $\phi(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ na zbiorze $\mathbb{R}$? Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia z którego skorzystałeś.

5. a) Pokaż, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi nierówność $e^{x^2} \geqslant 1 + x^2$.
b) Zbadaj zbieżność całki $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

6. Oblicz długość krzywej $y = e^x$, $x \in [0, 1]$.

II termin

1. Podaj definicję funkcji rosnącej w przedziale (a, b). Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia będącego warunkiem wystarczającym na to, aby funkcja różniczkowalna była rosnąca w przedziale i udowodnij to twierdzenie. Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia, z którego korzystasz w tym dowodzie.

2. Zbadaj przebieg zmienności i naszkicuj wykres funkcji $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}$.

3. a) Pokaż, że dla każdego $x > -1$ zachodzi nierówność $\ln(1+x) \leqslant x$.
b) Pokaż, że ciąg o wyrazie $a_n = (1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{9})(1+\frac{1}{27}) \cdot \ldots \cdot (1+\frac{1}{3^n})$ jest zbieżny.
Podaj dokładne wypowiedzi dwóch twierdzeń (dotyczących ciągów), z których skorzystałeś.

4. Wyznacz funkcję $\phi(x) = \int\limits_{(-\infty, x]} f(t)dt$, jeśli $f(x) = \begin{cases} x^3 e^{-x^2}, & x \leqslant 0 \\ \frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos^2 x + 2\cos x + 2}}, & x > 0. \end{cases}$

Czy funkcja $\phi(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ na zbiorze $\mathbb{R}$? Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia, z którego skorzystałeś.

5. a) Oblicz całkę $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}} dx$. b) Zbadaj zbieżność całki $\int\limits_1^e \frac{dx}{x^2\sqrt{\ln x}}$.
Wsk. $x^2 \geqslant x$ dla $x \geqslant 1$.

6. Narysuj krzywą $(x^2+y^2)^3 = 4x^2y^2$ i oblicz pole obszaru ograniczonego tą krzywą.

III termin

1. Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia Rolle'a i udowodnij go. Podaj wypowiedzi trzech twierdzeń, z których skorzystałeś.

2. a) Wyznacz ekstrema lokalne i przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = x^x$.
b) Wyznacz wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = x\ln(1-\frac{1}{x})$.

3. Oszacuj dokładność wzoru przybliżonego $\sqrt[3]{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{3}$ dla $|x| \leqslant \frac{1}{10}$.
Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia, z którego skorzystałeś.

4. Wyznacz funkcję $\phi(x) = \int\limits_{(-\infty,x]} f(t)dt$, jeśli $f(x) = \begin{cases} xe^x, & x \leqslant 0 \\ \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2x+2}}, & x > 0. \end{cases}$

Czy funkcja $\phi(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ na zbiorze $\mathbb{R}$? Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia, z którego skorzystałeś.

5. a) Oblicz całkę $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}dx$. b) Oblicz (o ile istnieje) całkę niewłaściwą $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

6. Oblicz pole obszaru ograniczonego kardioidą $r = a(1+\cos\phi)$.