ANALIZA 2 - EGZAMIN 2014/2015

1. termin

1. Sprawdź różniczkowalność w punkcie $(0,0,0)$ funkcji $f(x,y,z) = \begin{cases} \frac{z^3}{x^2+y^2+z^2}, & (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0, & (x,y,z) = (0,0,0). \end{cases}$
Podaj wypowiedź twierdzenia, z którego skorzystałeś.
Wsk. Skorzystaj ze współrzędnych sferycznych.

2. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji uwikłanej $z = z(x,y)$ danej równaniem $x^2 + y^2 + z^3 - 3z = 0$.

3. Oblicz moment bezwładności jednorodnej kuli o masie M i promieniu R względem stycznej do powierzchni tej kuli.

4. Pokaż, że pole wektorowe $\mathbf{F} = ((x+y+1)e^x - e^y, e^x - (x+y+1)e^y)$ jest potecjalne i znajdź jego potencjał.
Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia będącego warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby płaskie pole wektorowe było potencjalne.

5. Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną szeregu $\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-n^2x^2}$ na $\mathbb{R}$.
Podaj dokładne wypowiedzi dwóch twierdzeń, z których skorzystałeś.

6. Rozwiń w szereg Maclaurina funkcję $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2)$. Dla jakich x otrzymany szereg jest zbieżny? Dla jakich x wartość $f(x)$ jest równa sumie otrzymanego szeregu?

2. termin

1. Dana jest funkcja $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0). \end{cases}$
a) Sprawdź, czy funkcja f ma w punkcie $(0,0)$ pochodną wzdłuż dowolnego wektora.
b) Sprawdź, czy funkcja f jest różniczkowalna w $(0,0)$. Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia, z którego skorzystałeś.

2. Korzystając z metody Lagrange'a, wyznacz ekstrema lokalne warunkowe funkcji $f(x,y,z) = x - 2y + 2z$ przy warunku $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

3. Wyznacz środek ciężkości jednorodnego łuku cykloidy: $x(t) = a(t - \sin t)$, $y(t) = a(1 - \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

4. Oblicz strumień pola wektorowego $\mathbf{F} = [y^3, x^3, z^3]$ przez wewnętrzną stronę powierzchni $\frac{x^2}{4} + y^2 + z^2 = 2z$. Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia, z którego skorzystałeś.

5. Wyznacz sumę szeregu funkcyjnego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ i zbadaj jego zbieżność punktową i jednostajną na $\mathbb{R}$.
Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia, z którego skorzystałeś przy badaniu jednostajnej zbieżności.

6. Rozwiń w szereg Maclaurina funkcję $f(x) = \ln(8 + x^3)$. Dla jakich x otrzymany szereg jest zbieżny? Dla jakich x wartość $f(x)$ jest równa sumie otrzymanego szeregu?

3. termin

(zasadniczo zadania były kombinacją zadań z 1. i 2. terminu ze zmienionymi danymi)