Analiza I, egzaminy 2015/16

Termin 1

1. Oblicz wartość $cos10^\circ$ z dokładnością do 0,0001. Podaj wypowiedź twierdzenia, z którego skorzystałeś.

2. Zbadaj przebieg zmienności i naszkicuj wykres funkcji $f(x) = 2\sqrt{x} - lnx$.

3. Wyznacz funkcję $\phi(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, jeśli
$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} & x < 0 \\ \frac{sin2x}{\sqrt{sin^2x + cosx + 2}} & x \geqslant 0 \end{cases}$
Czy funkcja $\phi(x)$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$ na zbiorze $\mathbb{R}$? Odpowiedź uzasadnij.

4. Wyprowadź wzór rekurencyjny na $I_n = \int \frac{dx}{(1+x^2)^n}$ dla $n \in \mathbb{N}$

5. Oblicz pole obszaru ograniczonego asteroidą $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$

6. Niexh $X = \mathbb{R}\backslash\{0\}$ i niech $d(x,y) = |\frac{1}{x} - \frac{1}{y}|$ dla każdych $x, y \in X$

   (a)Pokaż, że d jest metryką w X

   (b)Podaj definicję ciągu Cauchy'ego i definicję przestrzeni zupełnej.

   (c)Czy przestrzeń (X, d) jest przestrzenią zupełną? Odpowiedź uzasadnij.

Termin 2

1. (a)Podaj definicję ciągłości i różniczkowalności funkcji f w punkcie oraz wypowiedź twierdzenia o związku między różniczkowalnością i ciągłością funkcji w punkcie.

   (b)Dla jakich wartości parametrów a, b, c funkcja
   $f(x) = \begin{cases} \sin x & x < 0 \\ ax^2 + bx + c & x \geqslant 0 \end{cases}$
   jest różniczkowalna w całej dziedzinie? Odpowiednią pochodną należy policzyć z definicji.

2. Oblicz wartość $\sin 10^\circ$ z dokładnością do 0,00001 i sprawdź czy $\sin 10^\circ < \frac{\sqrt{3}}{10}$. Podaj wypowiedź twierdzenia, z którego skorzystałeś. Wsk. $\pi = 3,14159...$, $\sqrt{3} = 1,73205...$

3. (a)Pokaż, że dla każdego $x \geqslant 0$ zachodzi nierówność $e^{x^2} \geqslant 1 + x^2$.

   (b)Zbadaj zbieżność całki $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$

4. Wyznacz funkcję $\phi(x) = \int_{-1}^{x} f(t)dt$, jeśli
   $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{1-2x-x^2}} & x \leqslant 0 \\ \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x + 2\cos x + 5} & x > 0 \end{cases}$
   Czy funkcja ϕ jest funkcją pierwotną funkcji f na dziedzinie funkcji ϕ? Odpowiedź uzasadnij.

5. Oblicz pole części figury ograniczonej krzywą $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$, zawartej wewnątrz okręgu $x^2 + y^2 = \sqrt{2}x$

6. (a)Podaj definicję zbioru zwartego w przestrzeni metrycznej

   (b)Podaj wypowiedź twierdzenia, będącego warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby zbiór był zwarty w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ z metryką euklidesową

   (c)Podaj i udowodnij twierdzenie o obrazie zbioru zwartego poprzez odwzorowanie ciągłe

Termin 3

1. (a)Pokaż, że dla każdego $x > 0$ zachodzi nierówność $ln(1 + x) < x$

   (b)Pokaż, że ciąg o wyrazie $a_n = (1 + \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{9})(1 + \frac{1}{27})...(1 + \frac{1}{3^n})$ jest zbieżny

2. Wyznacz wszystkie asymptoty, ekstrema lokalne, przedziały monotoniczności oraz przedziały wypukłości i wklęsłości funkcji $f(x) = x^x$. Naszkicuj wykres funkcji f

3. Podaj wypowiedź twierdzenia będącego warunkiem koniecznym istnienia minimum lokalnego funkcji w punkcie i udowodnij to twierdzenie. Podaj wypowiedzi dwóch twierdzeń, których użyłeś w tym dowodzie.

4. Oblicz pole części figury ograniczonej krzywą $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$, zawartej wewnątrz okręgu $x^2 + y^2 = \sqrt{2}x$

5. Oblicz pole powierzchni bryły powstałej z obrotu dookoła osi OX krzywej $y = x^2$, $x \in [-1, 1]$

6. (a)Podaj definicję iloczynu skalarnego

   (b)Pokaż, że znane z algebry liniowej odwzorowanie $\circ$ (gdzie $(x_1, x_2) \circ (y_1, y_2) = x_1y_1 + x_2y_2$) jest rzeczywiście iloczynem skalarnym w $\mathbb{R}^2$

   (c)Podaj definicję przestrzeni Hilberta. Zdefiniuj pojęcia występujące w tej definicji