# 2016

## I termin

1. Sprawdź, czy szereg funkcyjny $\sum\limits_{n=1}^{\infty} xe^{-n^2x}$ jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[0, +\infty)$. Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia, z którego skorzystałeś.

2. Rozwiń w szereg Fouriera funkcję $f(x) = |x|$ w $[-\pi, \pi]$. Narysuj wykres sumy otrzymanego szeregu dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$. Korzystając z otrzymanego rozwinięcia wyznacz sumę $1 + \cancel{\frac{1}{2^2}} + \frac{1}{3^2} + \cancel{\frac{1}{4^2}} + \ldots$

3. Wyznacz, korzystając z metody Lagrange'a, ekstrema warunkowe funkcji $f(x, y, z) = x + y + z$ przy warunku $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

4. Przyjmując nowe zmienne $u = \ln\sqrt{x^2 + y^2}$ i $v = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ przekształć równanie różniczkowe cząstkowe $(x + y)z'_x = (x - y)z'_y$.

5. a) Pokaż, że pole wektorowe $\mathbf{F} = (\cos y + y\cos x, \sin x - x\sin y)$ jest potencjalne i wyznacz jego potencjał. Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia będącego warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby płaskie pole wektorowe było potencjalne.
b) Oblicz $\int\limits_{(0,\pi)}^{(\pi,0)} (\cos y + y\cos x)dx + (\sin x - x\sin y)dy$. Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia, z którego skorzystałeś.

6. Oblicz pole płata powierzchniowego wyciętego walcem $x^2 + y^2 = Ry$ z półsfery $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \geqslant 0$.

## II-1 termin (do wyboru 1 drugi termin!)

1. a) Wyznacz sumę szeregu funkcyjnego $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (x^{2n} - x^{2n+2})$ na $[0, 1]$.
b) Sprawdź, czy ten szereg jest jednostajnie zbieżny na tym przedziale.
c) Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia, z którego skorzystałeś w podpunkcie b).

2. Wykorzystując odpowiednio dobrany szereg potęgowy oblicz sumę szeregu liczbowego $\frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \frac{5}{32} + \ldots$

3. Sprawdź różniczkowalność w całej dziedzinie funkcji $f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{z^3}{x^2+y^2+z^2}, & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0, & (x, y, z) = (0, 0, 0). \end{cases}$
Podaj wypowiedzi dwóch twierdzeń, z których skorzystałeś (jedno w przypadku gdy $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ i drugie w przypadku punktu $(0, 0, 0)$).
Wsk. Przy obliczaniu granic skorzystaj ze współrzędnych sferycznych.

4. Rozwiąż równanie różniczkowe cząstkowe $xz'_x + yz'_y = 0$, gdzie $z = z(x, y)$, przyjmując nowe zmienne $u = x$ i $v = \frac{y}{x}$.

5. Oblicz objętość bryły ograniczonej powierzchniami: $z = x^2 + y^2$ i $x + y + z = 0$.

6. Wyznacz współrzędne środka ciężkości jednorodnego łuku asteroidy: $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.

II-2 termin (do wyboru 1 drugi termin!)

**1.** a) Wyznacz sumę szeregu funkcyjnego $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ na $\mathbb{R}$.
b) Sprawdź, czy ten szereg jest jednostajnie zbieżny na $\mathbb{R}$.
c) Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia, z którego skorzystałeś w podpunkcie b).

**2.** Wyznacz obszar zbieżności oraz sumę szeregu $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n\cdot 4^n}$.

**3.** Sprawdź różniczkowalność w całej dziedzinie funkcji $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^3-y^4}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$
Podaj wypowiedzi dwóch twierdzeń, z których skorzystałeś (jedno w przypadku gdy $(x,y)\neq(0,0)$ i drugie w przypadku punktu $(0,0)$).

**4.** Wyznacz ekstrema lokalne funkcji uwikłanej $y=y(x)$ danej równaniem $x^4-2x^2y-x^2+y^2+y=0$.

**5.** Oblicz objętość bryły ograniczonej powierzchniami: $z=x^2+y^2$, $x^2+y^2-x=0$, $z=0$.

**6.** Oblicz masę trójkąta o wierzchołkach $A(1,1,2)$, $B(3,1,4)$, $C(2,2,5)$ o gęstości $\rho(x,y,z)=y$.

III termin

1. a) Wyznacz sumę szeregu funkcyjnego $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^n}$ na $\mathbb{R}$.
b) Sprawdź, czy ten szereg jest jednostajnie zbieżny na $\mathbb{R}$.
c) Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia, z którego skorzystałeś w podpunkcie b).

2. Rozwiń w szereg Maclaurina funkcję $f(x)=\operatorname{arctg}(x^2)$. Dla jakich $x$ otrzymany szereg jest zbieżny? Dla jakich $x$ wartość $f(x)$ jest równa sumie otrzymanego szeregu?

3. Sprawdź różniczkowalność w całej dziedzinie funkcji $f(x,y)=\begin{cases}\frac{y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$
Podaj wypowiedzi dwóch twierdzeń, z których skorzystałeś (jedno w przypadku gdy $(x,y)\neq(0,0)$ i drugie w przypadku punktu $(0,0)$).

4. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji $f(x,y,z)=x^3+xy+y^2-2xz+2z^2+3y-1$.

5. Wyznacz środek ciężkości jednorodnej bryły ograniczonej powierzchniami $z=1-x^2-y^2$ oraz $z=0$.

6. Oblicz pole płata powierzchniowego wyciętego walcem $x^2+y^2-2y=0$ z półsfery $x^2+y^2+z^2=4$, $z\geqslant 0$.