

Analiza I, egzaminy 2016/17

Termin 1

1. a) Pokaż, że dla każdego $x > 0$ zachodzi nierówność $\ln(1+x) < x$.
b) Pokaż, że ciąg o wyrazie $a_n = (1 + \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{9})(1 + \frac{1}{27}) \cdot \dots \cdot (1 + \frac{1}{3^n})$ jest zbieżny.
2. Zbadaj przebieg zmienności funkcji $f(x) = x^x$.
3. Oblicz wartość $\sin 10^\circ$ z dokładnością do 0,00001 i sprawdź czy $\sin 10^\circ < \frac{\sqrt{3}}{10}$.
Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia, z którego skorzystałeś.
Wsk. $\pi = 3,14159\dots$, $\sqrt{3} = 1,73205\dots$
4. Oblicz pole części figury ograniczonej krzywą $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$ zawartej wewnątrz okręgu $x^2 + y^2 = \sqrt{2}y$.
5. Oblicz objętość bryły powstałej z obrotu dokoła osi OX krzywej $y = e^{-x}|\sin x|$, dla $x \geq 0$.
6. a) Podaj definicję przestrzeni niespójnej i przestrzeni spójnej.
b) Podaj i udowodnij twierdzenie o obrazie przestrzeni spójnej poprzez odwzorowanie ciągłe.

Termin 2

1. a) Wyznacz wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = \frac{x}{x+2\sqrt{x^2-1}}$.
b) Oblicz granicę w $+\infty$ funkcji $f(x) = (x+2)e^{\frac{1}{x}} - x$.
2. Wyznacz wymiary stożka opisanego na kuli o promieniu R , który ma najmniejszą objętość.
3. a) Podaj definicję wypukłości w przedziale (a, b) funkcji różniczkowalnej.
b) Podaj wypowiedź twierdzenia będącego warunkiem wystarczającym na wypukłość funkcji w przedziale (a, b) i udowodnij to twierdzenie.
- c) Wyznacz przedziały wypukłości i wklęsłości funkcji $f(x) = (\ln x)^2 - 2 \ln x$.
4. Oblicz długość krzywej $y = \arcsin(e^{-x})$, $0 \leq x \leq 1$.
5. Oblicz całkę $\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8} dx$.
6. a) Podaj definicję równoważności metryk i jednostajnej równoważności metryk.
b) Pokaż, że metryki taksówkowa i maksimum są jednostajnie równoważne w \mathbb{R}^2 .
c) Czy metryka euklidesowa i metryka dyskretna są równoważne w \mathbb{R}^2 ? Odpowiedź uzasadnij.

Termin 3

1. a) Sprawdź, dla jakich x zachodzi równość $\arcsin x = \arctg \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
b) Wyznacz dziedzinę i asymptoty ukośne funkcji $f(x) = \frac{x}{x+2\sqrt{x^2-1}}$.
2. Wyznacz ekstrema lokalne i przedziały monotoniczności funkcji $f(x) = x^{(x^2)}$.
3. a) Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia o wzorze Taylora.
b) Oszacuj dokładność wzoru przybliżonego $\sqrt[3]{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{3}$ dla $|x| \leq \frac{1}{10}$.
4. Oblicz całki: a) $\int \arcsin \sqrt{x} dx$, b) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos^2 x + 2 \cos x + 5}} dx$.
5. Oblicz pole powierzchni bryły powstałej z obrotu jednego łuku cykloidy $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ dokoła osi OX .
6. Podaj definicje: a) ciągu zbieżnego w przestrzeni metrycznej,
b) ciągu Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej,
c) przestrzeni zupełnej,
d) normy w odpowiedniej przestrzeni,
e) przestrzeni Banacha.