

Analiza I, egzaminy 2017/18

Termin 1

1. Pokaż, że ciąg rekurencyjny: $a_1 = 1$; $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + a_n + 1}{a_n + 3}$ jest zbieżny i oblicz jego granicę.
2. Wyznacz wszystkie asymptoty, przedziały monotoniczności i ekstrema lokalne funkcji $f(x) = |x|^{\frac{1}{x}}$.
3. a) Podaj definicję całki Riemanna funkcji na przedziale domkniętym (wraz ze wszystkimi pojęciami potrzebnymi do wypowiedzi tej definicji).
b) Oblicz granicę ciągu $a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{n+n}$.
4. Oblicz długość krzywej $y = \ln \cos x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$.
5. Oblicz pole powierzchni elipsoidy powstałej z obrotu dookoła osi OX elipsy: $x = \cos t$, $y = 2 \sin t$.
6. a) Podaj definicję metryki w zbiorze i definicję normy w odpowiedniej przestrzeni.
b) Udowodnij, że każda przestrzeń unormowana jest metryczna.

Termin 2

1. Pokaż, że ciąg rekurencyjny: $a_1 = 1$; $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + a_n + 1}{a_n + 3}$ jest zbieżny i oblicz jego granicę.
2. a) Oblicz granicę $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$. b) Wyznacz wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x+3}}$.
3. a) Podaj definicję całki Riemanna funkcji na przedziale domkniętym (wraz ze wszystkimi pojęciami potrzebnymi do wypowiedzi tej definicji).
b) Oblicz granicę ciągu $a_n = \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \frac{n}{(n+3)^2} + \dots + \frac{n}{(n+n)^2}$.
4. Oblicz objętość bryły ograniczonej powierzchnią powstałą przez obrót dookoła osi OX krzywej $y = \arcsin x$, $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$.
5. Narysuj krzywą $r(\varphi) = a \cos^3(\frac{\varphi}{3})$ i oblicz jej długość.
6. a) Podaj definicje równoważności i jednostajnej równoważności metryk w zbiorze X .
b) Pokaż, że metryki: taksówkowa i maksimum są jednostajnie równoważne w \mathbb{R}^2 .
c) Pokaż, że metryka dyskretna nie jest równoważna metryce indukowanej przez wartość bezwzględną $|\cdot|$ w \mathbb{R} .

Termin 3

1. a) Oblicz granicę ciągu rekurencyjnego: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$.
b) Oblicz granicę ciągu $a_n = \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \frac{n}{(n+3)^2} + \dots + \frac{n}{(n+n)^2}$.
2. a) Oblicz granicę $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos x)^{\operatorname{ctg} x}$.
b) Wyznacz wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{x-1}}$.
3. a) Pokaż, że dla każdego $x \geq 0$ zachodzi nierówność $e^{x^2} \geq 1 + x^2$.
b) Zbadaj zbieżność całki $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.
4. Narysuj krzywą $r(\varphi) = \sin \varphi$ oraz oblicz pole ograniczone tą krzywą i długość tej krzywej.
5. Oblicz pole powierzchni bryły powstałej przez obrót dookoła osi OX krzywej $y = \sin x$, $0 \leq x \leq \pi$.
6. a) Podaj definicję zbioru zwartego w przestrzeni metrycznej.
b) Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia o obrazie zbioru zwartego poprzez odwzorowanie ciągłe i podaj jego dowód.