Analiza I, egzaminy 2018/19
Termin 1
1. Korzystając z definicji całki Riemanna oblicz granicę ciągu $a_n = \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$.
Wsk. $a = e^{\ln a}$, $\ln ab = \ln a + \ln b$.
2. Zbadaj przebieg zmienności funkcji $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$.
3. a) Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia o wzorze Taylora.
b) Oszacuj dokładność wzoru przybliżonego $\sqrt[3]{1+x} \simeq 1 + \frac{x}{3}$ dla $0 < x < \frac{1}{10}$.
4. Oblicz całkę (o ile istnieje) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$.
5. Narysuj krzywą $r(\varphi) = a\cos^3(\frac{\varphi}{3})$ i oblicz jej długość.
6. a) Niech X i Y będą przestrzeniami topologicznymi oraz niech $f : X \to Y$.
Podaj definicję granicy funkcji f w punkcie $x_0 \in X$ oraz definicję ciągłości funkcji f na X.
b) Podaj definicję przestrzeni niespójnej i przestrzeni spójnej.
c) Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia o obrazie przestrzeni spójnej poprzez odwzorowanie ciągłe i udowodnij to twierdzenie.

Termin 2
1. Sprawdź, czy ciąg rekurencyjny: $x_1 = 6$; $\quad x_{n+1} = \sqrt{x_n + 12}$ $\quad$ dla $n \geqslant 1$, jest zbieżny i jeśli tak, to wyznacz jego granicę.
2. a) Wyznacz wartość najmniejszą i największą funkcji $f(x) = x^{-x}$ na przedziale $(0, +\infty)$.
b) Wyznacz wszystkie asymptoty funkcji $f(x) = x - \sqrt{1+x^2}$.
3. a) Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia o wzorze Taylora.
b) Oblicz $\sin 1^\circ$ z dokładnością do $0,0001$.
4. Oblicz objętość bryły powstałej z obrotu dokoła osi OX krzywej $y = e^{-x}\cos x$, dla $x \geqslant 0$.
5. Narysuj krzywą $r(\varphi) = a(1 + \cos\varphi)$ i oblicz jej długość.
6. a) Niech X i Y będą przestrzeniami topologicznymi oraz niech $f : X \to Y$.
Podaj definicję ciągłości funkcji f na X.
b) Podaj definicję przestrzeni niespójnej i przestrzeni spójnej.
c) Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia o przyjmowaniu wartości pośrednich przez funkcję na przestrzeni spójnej i udowodnij to twierdzenie.

Termin 3
1. a) Pokaż, że dla każdego $x > 0$ zachodzi nierówność $\ln(1+x) < x$.
b) Pokaż, że ciąg o wyrazie $a_n = (1 + \frac{1}{1\cdot 2})(1 + \frac{1}{2\cdot 3})(1 + \frac{1}{3\cdot 4}) \cdot \ldots \cdot (1 + \frac{1}{n(n+1)})$ jest zbieżny.
2. Dla jakich wartości parametrów a, b funkcja $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0, \\ a\sin x + b, & x \geqslant 0. \end{cases}$
jest różniczkowalna w całej dziedzinie?
b) Podaj dokładną wypowiedź twierdzenia o związku między ciągłością i różniczkowalnością funkcji w punkcie i udowodnij to twierdzenie.
3. Znajdź wymiary walca o największej objętości wpisanego w kulę o promieniu R.
4. Oblicz długość krzywej $y = e^x$, $x \in [0, 1]$.
5. Narysuj krzywą $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$ i oblicz pole obszaru ograniczonego tą krzywą.
6. Podaj definicje: a) ciągu zbieżnego w przestrzeni metrycznej,
b) ciągu Cauchy'ego w przestrzeni metrycznej,
c) przestrzeni zupełnej,
d) normy w odpowiedniej przestrzeni,
e) przestrzeni Banacha.