

1. Oblicz całki nieoznaczone: $\int \frac{(1-x)^2}{\sqrt{x}} dx$, $\int \frac{dx}{x^2(1+x^2)}$, $\int x^2 \cos x dx$, $\int \ln^2 x dx$, $\int \cos(\ln x) dx$, $\int \frac{\sin 2x}{\cos x} dx$, $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{4x+5}}$, $\int \frac{3x^2+2}{x^3+2x+4} dx$, $\int \frac{dx}{3+4x^2}$, $\int \frac{x^2+6x+5}{x^2-6x+5} dx$, $\int \frac{1}{x^3+6x^2+12x+8} dx$, $\int \frac{dx}{x^3-4x^2+5x-2}$, $\int \frac{dx}{5+4 \cos x}$, $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} dx$, $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$, $\int \frac{dx}{\sqrt{-3x+2x+1}}$, $\int \frac{x^3+2x^2+x-1}{\sqrt{x^2+2x-1}} dx$, $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x-4}}$.

2. Oblicz całki oznaczone: $\int_0^1 \frac{x-1}{x+1} dx$, $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+x^4}$, $\int_0^{\frac{3}{4}} \sqrt{e^x-1} dx$.

3. Wyznacz (dwoma metodami) funkcję pierwotną funkcji $f(x) = |\cos x|$ w przedziale $[0, \pi]$.

4. Wyznacz funkcję $\Phi(x) = \int_{]-\infty, x]} f(t) dt$, jeśli $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3-1}, & x \leq 0 \\ \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x}}, & x > 0. \end{cases}$

Oblicz $\phi'(x)$ tam gdzie istnieje.

5. Udowodnij, że jeśli funkcja f jest całkowalna i parzysta na $[-a, a]$, to $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.

6. Oblicz całkę niewłaściwą $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$.

7. Zbadaj zbieżność całki $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^3+1}$.

8. a) Pokaż, że dla każdego $x \geq 0$ zachodzi nierówność $e^{x^2} \geq 1 + x^2$.

b) Zbadaj zbieżność całki $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

9. Oblicz pole ograniczone elipsą $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

10. Oblicz pole figury ograniczonej krzywą $r = a \cos 3\phi$.

11. Narysuj krzywą $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2 y^2$ i oblicz pole obszaru ograniczonego tą krzywą.

12. Oblicz długość krzywej $y = \sqrt{x-x^2} + \arcsin \sqrt{x}$.

13. Oblicz pole powierzchni bryły powstałej z obrotu dookoła osi OX krzywej $y = \frac{x^2}{2}$, $x \in [0, 1]$.

14. Obliczyć długość krzywej danej wzorem $f(x) = \int_{[-\frac{\pi}{2}, x]} \sqrt{\cos t} dt$.