1. Rozwiąż równania i nierówności:

$$x^4 - 3x^2 - 4 > 0$$
$$-x^3 + 2x^2 + 5x - 6 \leqslant 0$$
$$\frac{2x-3}{4-x} \geqslant 2$$
$$\sqrt{3x+1} - \sqrt{x-1} = 2$$
$$\sqrt{3+2x-x^2} > x-1$$
$$2^{x+1} - 3^x < 2^{x-1}$$
$$\log\sqrt{x-5} + \log\sqrt{2x-3} + 1 = \log 30$$
$$\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$$
$$2^{4\cos^2 x+1} + 16 \cdot 2^{4\sin^2 x-3} = 20$$
$$\log_{\sin x}(\frac{4}{3}) = -2$$
$$\log_{\frac{2}{3}}[\sin(2x) + \sin^2(2x) + \cdots] > 0$$
$$|3x+4| + 2 < 2x$$
$$|3 - \log_{\frac{1}{2}} x| < 1$$
$$(x^2-1)(\log_{\frac{1}{2}} x - 1) > 0$$

2. Dane są zbiory: $A = \{x : x^3 + x + 6 \geqslant 4x^2\}$ i $B = \{x : |\frac{2x-3}{x-1}| < 2\}$. Wyznacz $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

3. Wiedząc, że $\mathrm{tg}x = \sqrt{2}$ oraz $x \in (\pi, \frac{3}{2}\pi)$ wyznacz $\sin x$, $\cos x$, $\mathrm{ctg}x$.

4. Wyznacz dziedzinę funkcji: a) $f(x) = \sqrt{\log_{\frac{1}{2}} \frac{x}{x^2-1}}$, b) $g(x) = \sqrt{|sinx| - \frac{\sqrt{3}}{2}}$, c) $h(x) = \arcsin\frac{2x}{1+x}$, d) $t(x) = \arccos(1-x^2)$.

5. Oblicz: a) $\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2})$, b) $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}(\frac{2}{3}\pi)$, c) $\arcsin(-\frac{\sqrt{2}}{2})$.

6. Rozwiąż równania: a) $\arcsin x = \frac{\pi}{3}$, b) $\arccos x = -\frac{\pi}{4}$, c) $\mathrm{tg}(2\mathrm{arctg}3x) = \sqrt{3}$ d) $\mathrm{tg}(\frac{1}{2}\mathrm{arctg}x) = \sqrt{3}$.

7. Metodą indukcji matematycznej udowodnij, że dla każdego naturalnego n:

a) zachodzi równość $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$

b) dla każdego $x > -1$ zachodzi nierówność Bernoulli'ego $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$,

c) $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ dzieli się przez 133.

8. Sprawdź, czy ciąg $a_n = \frac{2^n}{n!}$ jest monotoniczny i ograniczony.

9. Oblicz granice ciągów:

$$a_n = \frac{1-2+3-4+5-6\cdots-2n}{\sqrt{n^2+1}}$$
$$b_n = \frac{4\cdot 3^{n+1} + 2\cdot 4^n}{5\cdot 2^n + 4^{n+2}}$$
$$c_n = \frac{\sqrt{n^2+5}-n}{\sqrt{n^2+2}-n}$$
$$d_n = n(\sqrt[3]{n^3+n} - n)$$
$$e_n = \sqrt[n]{\frac{(-1)^n}{n} + 2n}$$
$$f_n = \frac{1}{n^2+1} + \frac{2}{n^2+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n}$$
$$g_n = (\frac{n+1}{n+2})^n$$

$$h_n = \frac{\ln(2^n + e^n)}{n}$$
$$i_n = \frac{n}{n+1} \cos \frac{n\pi}{2}$$
$$j_n = \frac{n^2}{2^n}$$

10. Udowodnij, że dla każdego naturalnego n zachodzi nierówność $(1 + \frac{1}{n})^n < 3$.

11. Pokaż , że ciąg $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ jest rosnący.

12. Oblicz granicę ciągu rekurencyjnego: $a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$.
Wsk. Wyznacz wzór jawny na a_n i udowodnij metodą indukcji jego poprawność.

13. Pokaż, że ciąg rekurencyjny: $a_1 = \frac{1}{4}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}a_n^2$ jest zbieżny i oblicz jego granicę.

14. Pokaż, że ciąg rekurencyjny: $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{a_n})$ jest zbieżny i oblicz jego granicę.

15. Wyznacz granice dolną i górną ciągu $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n(-1)^n + \sin \frac{n\pi}{4}$.

16. Oblicz granice funkcji (nie korzystając z reguły de l'Hospitala):

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^4 + 3x^2 - 4}{x+1}$$
$$\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x}$$
$$\lim_{x\to\infty} x \cdot \sin \frac{1}{x}$$
$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x} \sin(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$$
$$\lim_{x\to 0} e^{-\frac{1}{x}}$$
$$\lim_{x\to\infty} (\frac{3x-1}{3x+1})^{2x-5}$$
$$\lim_{x\to -2} \frac{\arcsin(x+2)}{x^2 + 2x}$$
$$\lim_{x\to\infty} \sin x$$

17. Narysuj wykres oraz zbadaj ciągłość w całej dziedzinie funkcji $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leqslant 0 \\ x - x^2, & 0 < x < 1 \\ \ln x, & x \geqslant 1. \end{cases}$

18. Dla jakiej wartości parametru a funkcja $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ jest ciągła w całej dziedzinie?

19. Oblicz pochodne funkcji:

$$f(x) = (4x^3 - 2x + 5)e^x$$
$$f(x) = 2\sqrt[3]{x} - \frac{4}{x^4}$$
$$f(x) = \frac{\ln x}{1 + x^2}$$
$$f(x) = x \cdot \text{arcsin}x + \sqrt{1 - x^2}$$
$$f(x) = \text{arcsin}(\frac{1}{x})$$
$$f(x) = e^{\sin x}$$

$$f(x) = (\cos x)^{\sin x}$$
$$f(x) = x^{x^x}$$

20. Zbadaj różniczkowalność w całej dziedzinie funkcji $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \text{arctg}\frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$
Czy $f \in C^1(\mathbb{R})$?

21. Dla jakich wartości parametrów a, b, c funkcja $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0, \\ ax^2 + bx + c, & x \geqslant 0. \end{cases}$
jest różniczkowalna w całej dziedzinie?

22. Sprawdź, czy funkcja $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\frac{\pi}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ spełnia założenia twierdzenia Rolle'a na przedziale $[-1, 1]$ i jeśli tak, to znajdź punkt z tezy tego twierdzenia.

23. Zastosuj twierdzenie Lagrange'a do funkcji $f(x) = x^3 + x$ na przedziale $[-1, 1]$ i wyznacz punkt z tezy tego twierdzenia.

24. Oblicz granice funkcji:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\text{tg}x - x}{x - \sin x}$$
$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot \ln x$$
$$\lim_{x\to\infty} (\pi - 2\text{arctg}x)\ln x$$
$$\lim_{x\to 0} (\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x})$$
$$\lim_{x\to 0^+} x^x$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{x\text{ctg}x - 1}{x^2}$$
$$\lim_{x\to 0^+} (\ln\frac{1}{x})^x$$
$$\lim_{x\to 0} (\frac{\text{arcsin}x}{x})^{\frac{1}{x^2}}$$

25. Zbadaj różniczkowalność w całej dziedzinie funkcji f z zad. 17.

26. Sprawdź dla jakich x zachodzi równość $\text{arctg}x = \text{arcctg}\frac{1}{x}$.

27. Wyznacz ekstrema lokalne i przedziały monotoniczności funkcji: a) $f(x) = 4x^2 - 10x + 5\text{arctg}2x$, b) $g(x) = x^{x^2}$, c) $h(x) = 3\cos 2x + \cos^2 x + 4x$, d) $t(x) = \arccos(\frac{1-x^2}{1+x^2})$.

28. Wyznacz wartość najwieksza i najmniejszą funkcji $f(x) = 1 - |9 - x^2|$ osiąganą na przedziale $[-5, 1]$.

29. Wyznacz przedziały wklęsłości i wypukłości oraz punkty przegięcia funkcji $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

30. Sprawdź, że dla każdego x zachodzi nierówność $2x\text{arctg}x \geqslant \ln(1 + x^2)$.

31. a) Pokaż, że dla każdego $x > 0$ zachodzi nierówność $\ln(1 + x) < x$.

b) Pokaż, że ciąg o wyrazie $a_n = (1 + \frac{1}{2})(1 + \frac{1}{4})(1 + \frac{1}{8}) \cdot \ldots \cdot (1 + \frac{1}{2^n})$ jest zbieżny.

32. Pokaż, że $\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$ jeśli $0 < b < a$

33. Wyznacz wszystkie asymptoty funkcji: a) $f(x) = x\ln(\frac{2x}{x-2})$, b) $g(x) = \frac{x}{x+2\sqrt{x^2-1}}$.

34. Zbadaj przebieg zmienności funkcji: a) $f(x) = |x|e^{-x^2}$, b) $g(x) = 2\sqrt{x} - \ln x$.

35. Znajdź wymiary walca o największej objętości wpisanego w kulę o promieniu R.

36. Napisz wzór Maclaurina rzędu $n = 4$ dla funkcji $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$.

37. a) Korzystając ze wzoru Taylora pokaż, że dla każdego x zachodzi nierówność $e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$.

b) Czy dla każdego x prawdziwa jest nierówność $e^x \geqslant 1 + x + \frac{x^2}{2}$?

38. Oszacuj dokładność wzoru przybliżonego $\sqrt{1+x} \cong 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$ dla $|x| \leqslant 0,25$.

39. Stosując wzór Maclaurina oblicz $\ln(1,1)$ z dokładnością do 10^{-3}.