1. Pokaż, że funkcja $d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ jest metryką w $\mathbb{R}^2$.
2. Oblicz granicę ciągu $x_n = (\frac{n^2 \cos(n!)}{n^3+2n}, (1 + \frac{1}{n})^{2n-3}, \sqrt{4n^2 + 3n - 2} - 2n)$.
3. Oblicz granicę $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$.
4. Zbadaj ciągłość w całej dziedzinie funkcji: a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

5. Oblicz granicę $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y}$ oraz granicę iterowaną $\lim_{y\to0}(\lim_{x\to0}(x+y) \sin \frac{1}{x} \sin \frac{1}{y})$.
6. Niech $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Pokaż, że funkcja f ma w punkcie $(0, 0)$ pochodne kierunkowe w dowolnym kierunku ale nie jest różniczkowalna w tym punkcie.
7. Pokaż, że funkcja $f(x, y) = \begin{cases} 0, & xy \neq 0 \\ 1, & xy = 0 \end{cases}$

ma obie pochodne cząstkowe w punkcie $(0, 0)$ a nie jest nawet ciągła w tym punkcie.
8. Zbadaj różniczkowalność w całej dziedzinie funkcji:
a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, b) $f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}$, c) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

9. Oblicz pochodną wzdłuż wektora $h = (3, -1)$ funkcji $f(x, y) = x^4 + y^4 + 2xxy + 1$ w punkcie $x_0 = (1, 2)$.
10. Oblicz pochodną kierunkową w kierunku wektora $h = (1, 2, 2)$ funkcji $f(x, y, z) = \ln(x^2 + y^2 + z^2)$ w punkcie $x_0 = (-2, 1, 2)$.
11. Oblicz przybliżoną wartość $\frac{(1{,}03)^2}{\sqrt[3]{0{,}98 \sqrt[4]{1{,}05}}}$
12. Wyznacz równanie płaszczyzny stycznej do wykresu funkcji $f(x, y) = \operatorname{arctg}(\frac{y}{x})$ w punkcie $(1, 1)$.
13. Wyznacz macierz Jacobiego i jakobian odwzorowania $(r, \varphi, \psi) \to (x(r, \varphi, \psi), y(r, \varphi, \psi), z(r, \varphi, \psi))$, gdzie $x = r \sin \psi \cos \varphi$, $y = r \sin \psi \sin \varphi$, $x = r \cos \psi$.
14. Oblicz pochodną $z'(t)$ funkcji złożonej $z = e^{x-2y}$, gdzie $x = \sin t$, $y = t^3$.
15. Oblicz pochodne cząstkowe z'_u i z'_v funkcji złożonej $z = x^2y - xy^2$, gdzie $x = u + v$, $y = u - v$.
16. Rozwiąż równanie różniczkowe cząstkowe $yz'_x - xz'_y = 0$, gdzie $z = z(x, y)$, przyjmując nowe zmienne $u = x$, $v = x^2 + y^2$.
17. Sprawdź, czy funkcja $f(x, y) = e^{x+y}$ jest dwukrotnie różniczkowalna w $\mathbb{R}^2$. Jeśli tak, to oblicz różniczkę zupełną 2–go rzędu d^2f.
18. Dana jest funkcja $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Sprawdź, czy pochodne mieszane tej funkcji w punkcie $(0, 0)$ są sobie równe.
19. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji: a) $f(x, y) = x^3 - 2y^3 - 3x + 6y$, b) $f(x, y) = x^3 - 2x^2y^2 + y^4$, c) $f(x, y, z) = \frac{2x^2}{y} + \frac{y^2}{z} - 4x + 2z^2$.
20. Wyznacz, korzystając z metody Lagrange'a, ekstrema warunkowe funkcji: a) $f(x, y) = x + y$ przy warunku $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$, b) $f(x, y, z) = x + y + 2z$ przy warunku $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
21. Wyznacz wartość największą i najmniejszą osiąganą przez funkcję $f(x, y, z) = x + y + z$ na zbiorze $V = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \leqslant z \leqslant 1\}$.
22. Liczbę dodatnią a przedstaw w postaci sumy takich trzech składników dodatnich, aby ich iloczyn był największy.
23. Na powierzchni sfery $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ znajdź punkt dla którego suma kwadratów odległości od punktów $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, \ldots, n$, jest najmniejsza.
24. Pokaż, że równanie $x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$ określa funkcję uwikłaną $y = y(x)$ w otoczeniu punktu $(1, 0)$. Oblicz $y'(1)$. Wyznacz wzór funkcji $y(x)$.
25. Oblicz pierwszą i drugą pochodną funkcji uwikłanej $y = y(x)$ danej równaniem $\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.
26. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji uwikłanej $y = y(x)$ danej równaniem: a) $x^4 + y^2 - 4xy = 0$, b) $xy^2 - x^2y = 2a^3$, gdzie a jest parametrem.
27. Oblicz wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego i drugiego rzędu funkcji uwikłanej $z = z(x, y)$ danej równaniem $x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy - z - 9 = 0$ w punkcie $(1, -2)$, $(z = 1)$.
28. Wyznacz ekstrema lokalne funkcji uwikłanej $z = z(x, y)$ danej równaniem $x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y + 2z = 2$.