1. Pokaż, że szereg jest zbieżny i oblicz jego sumę:
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+4^n}{5^n}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.
2. Sprawdź, czy następujące szeregi są zbieżne: a) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln(1+\frac{1}{n})$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!2^n}{n^{2n}}$
c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$ d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{n\pi}{3}}{2^n}$ e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{3}}{2^n}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$
g) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^3+3n-2}$
3. Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcyjnego:
a) $f_n(x) = \frac{nx}{n^2+x^2}$ na $\mathbb{R}$,
b) $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$ na $[0,1]$.
4. Zbadaj zbieżność punktową i jednostajną szeregu: a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^2}}$ na $\mathbb{R}$,
b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^5x^2}$ na $[1,+\infty)$, c) $\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1-x)$ na $[0,1]$.
5. Zbadaj obszar zbieżności i wyznacz sumę szeregu potęgowego: a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}x^{2n}}{(n+1)4^n}$,
b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(x+2)^n}{2^n}$.
6. Oblicz sumę szeregu liczbowego $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}n}{3^n}$.
7. Rozwiń w szereg Taylora funkcję $f(x)$ w otoczeniu punktu x_0:
a) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$, b) $f(x) = \ln(x^2+3x+2)$, $x_0 = 0$,
c) $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$, $x_0 = 0$, d) $f(x) = e^{-x^2}$, $x_0 = 0$, e) $f(x) = e^x$, $x_0 = 2$,
f) $f(x) = \sin^2 x$, $x_0 = 0$.
8. Rozwiń w szereg Fouriera funkcję $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ x, & 0 \leqslant x < \pi, \end{cases}$
narysuj wykres sumy otrzymanego szeregu dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ oraz korzystając z otrzymanego rozwinięcia oblicz sumę szeregu liczbowego $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots$.
9. Rozwiń w szereg Fouriera funkcję $f(x) = x^2$ w $[-\pi,\pi]$, narysuj wykres sumy otrzymanego szeregu dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ i korzystając z otrzymanego rozwinięcia oblicz sumę szeregu $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$ oraz sumę szeregu $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots$
10. Rozwiń w szereg sinusów funkcję $f(x) = \frac{\pi}{4}$ w $(0,\pi)$, narysuj wykres sumy otrzymanego szeregu dla wszystkich $x \in \mathbb{R}$ oraz korzystając z otrzymanego rozwinięcia oblicz sumę szeregu liczbowego $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$