

1. Jakie równanie nazywamy równaniem różniczkowym o zmiennych rozdzielonych? Dla podanych równań wypisać podstawienia, które sprowadzają te równania do równań o zmiennych rozdzielonych:

$$a) y' = \frac{1}{2t-y} + 2t - y + 7, \quad b) y' = \frac{t+3y}{2t+6y+5}, \quad c) y' = \frac{y}{t}(\ln y - \ln t).$$

2. Rozwiązać problem Cauchy'ego

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{t} + 2 \frac{t}{y} \\ y(1) = -4. \end{cases}$$

3. Rozwiązać równanie $y' = \frac{y}{t}(1 + 5 \ln y - 5 \ln t)$. Rozwiązanie podać w jawnej postaci i określić jego dziedzinę.

4. Rozwiązać podane równania. Rozwiązania podać w jawnej postaci i określić ich dziedziny

$$a) y' = -e^{y+t+1}, \quad b) y' = y - 3t + 4, \quad c) y' = \frac{1}{2t+y} + 2t + y - 2.$$

5. Znaleźć rozwiązania równań

$$\begin{array}{lll} a) y' = \frac{y}{t} + e^{2\frac{y}{t}}, & b) ty' - y = t \operatorname{tg} \frac{y}{t}, & c) y' = -\frac{2ty}{y^2-t^2}, \\ d) ty' - y = (t+y) \ln \frac{t+y}{t}, & e) y' = 10^{t+y}, & f) y' = \frac{y+\sqrt{y^2+t^2}}{t}, \\ g) y' = \sin(t-y), & h) y' = (2t+y-3)^2 - 4t - 2y + 5, & i) y' = -\frac{8t+4y+1}{4t+2y+1}, \\ j) y' = \frac{t+y-2}{y-t-4}, & k) y' = -\frac{t-2y+5}{2t-5y+4}, & l) (y-t)dt = -(y+t)dy. \end{array}$$

6. a) Co to znaczy, że problem Cauchy'ego jest jednoznaczny?

- b) Ile rozwiązań określonych na $\mathbb{R}$ ma problem Cauchy'ego

$$\begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}} \\ y(1) = 0 \end{cases} ?$$

7. Czy przez każdy punkt $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ przechodzi jakaś krzywa całkowa równania $y' = y^3 + t^2$? Odpowiedź uzasadnić korzystając z twierdzenia Peano.

8. a) Sprawdzić, czy funkcja $f(t, y) = \sqrt{y} + t$ spełnia warunek Lipschitza względem drugiej zmiennej.

- b) Czy wykresy dwóch różnych rozwiązań równania $y' = \sqrt{y} + t$ mogą się przecinać w jakimś punkcie $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ (wsk. skorzystać z twierdzenia Picarda)?

9. Sformułować twierdzenie Picarda o jednoznaczności rozwiązania problemu Cauchy'ego.

- Czy wykresy dwóch różnych rozwiązań równania $y' = y^3 + t + 1$ mogą przecinać się w jakimś punkcie $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$? Odpowiedź uzasadnić.

10. Sprawdzić, czy problem początkowy $y' = y^2 + 1$, $y(0) = 0$ ma rozwiązanie określone na całej prostej.

11. Obliczyć dwie pierwsze iteracje Picarda dla problemu Cauchy'ego $y' = t^2 + y^2$, $y(0) = 1$.

12. Obliczyć trzy pierwsze iteracje Picarda dla problemu Cauchy'ego $y' = e^t + y^2$, $y(0) = 0$.

13. Wyprowadzić wzór na n -tą iterację Picarda $y_n(t)$ i obliczyć jej granicę przy $n \rightarrow \infty$ dla problemu Cauchy'ego $y' = 2ty$, $y(0) = 1$.
14. Znaleźć funkcje $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające równania całkowe
- $$a) \ y(t) = \int_1^t e^{-y(s)} ds, \qquad b) \ y(t) = -1 + \int_1^t \frac{e^{y(s)}}{y(s)} ds.$$
15. Uzasadnić, że $y \equiv -1$ jest jedynym rozwiązaniem problemu Cauchy'ego $y' = t(1 + y)$, $y(0) = -1$.
16. Znaleźć wszystkie rozwiązania problemu Cauchy'ego $y' = t\sqrt{1 - y^2}$, $y(0) = 1$.
17. Dla problemu Cauchy'ego $y' = \sqrt{y - 1}$, $y(t_0) = y_0$ dobrać warunki początkowe tak, aby problem miał a) jednoznaczne rozwiązanie, b) nie miał rozwiązania, c) miał nieskończenie wiele rozwiązań.
18. Ile rozwiązań równania spełnia podany warunek początkowy:
- a) $y' = 5y^{4/5}$, $y(1) = 1$,
b) $y' = 4|y|^{3/4}$, $y(1) = -1$.
19. Ile rozwiązań ma problem początkowy:
- $$y' = f(t, y), \quad y(0) = 1, \text{ gdzie } f(t, y) = \begin{cases} 2 & \text{dla } y < 1 \\ 5 & \text{dla } y \geq 1 \end{cases} \quad ?$$