

1. Jakie równanie nazywamy równaniem różniczkowym liniowym pierwszego rzędu?

Z poniższych zdań wybrać zdania prawdziwe i uzasadnić je.

- (a) suma rozwiązań równania liniowego jednorodnego pierwszego rzędu jest rozwiązaniem tego równania;
- (b) suma rozwiązań równania liniowego niejednorodnego pierwszego rzędu jest rozwiązaniem tego równania;
- (c) suma rozwiązań równania liniowego niejednorodnego pierwszego rzędu i skojarzonego z nim równania liniowego jednorodnego jest rozwiązaniem równania liniowego niejednorodnego.

2. a) Rozwiązać równanie $y' - \frac{y}{t} = \ln t$,

b) Rozwiązać problem Cauchy'ego $\frac{1}{2} \sin 2t y' - y = \sin^3 t$, $y(\frac{\pi}{4}) = 0$.

3. Czy równanie $y' + 2ty = -e^{-t^2}$ posiada rozwiązanie takie, że $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t) = 0$? Ile jest takich rozwiązań?

4. Omówić sposób całkowania równania różniczkowego Bernoulliego.

Czy równanie $y' + (t+1)y = ty^2\sqrt{y}$ jest równaniem różniczkowym Bernoulliego?

5. Rozwiązać problem Cauchy'ego

$$ty' + y = \frac{1}{y^2}, \quad y(1) = \sqrt[3]{2}.$$

6. Znaleźć rozwiązanie równania $y' + \cos t y = \frac{1}{2} \sin 2t$.

7. Rozwiązać problemy Cauchy'ego:

$$a) ty' + y = e^t, \quad y(1) = 2; \quad b) y' + \sqrt{1+t^2} y = 0, \quad y(0) = \sqrt{5};$$

$$c) ty' + y = \ln t + 1, \quad y(e) = 1.$$

8. Znaleźć rozwiązanie równania $y' \sin t + y \cos t = 1$, ograniczone przy $t \rightarrow 0$.

9. Rozwiązać równanie

$$\frac{y'}{1+y^2} + \operatorname{arctg} y = e^{-t}$$

(*wsk. stosując podstawienie $u = \operatorname{arctg} y$ sprowadzić równanie do równania liniowego*).

10. Rozwiązać równania

$$a) y' + \frac{ty}{1-t^2} = t\sqrt{y}, \quad b) ty' + y = y^2 \ln t.$$

11. a) Rozwiązać równanie $y' + \frac{y}{t} = y^2 \ln t$.

b) Dla jakich warunków początkowych $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ problem Cauchy'ego

$$y' + \frac{y}{t} = y^2 \ln t, \quad y(t_0) = y_0$$

jest jednoznaczny?

c) Rozwiązać ten problem z warunkiem $y(1) = 0$.

12. Rozwiązać równanie różniczkowe Riccatiego mając dane rozwiązanie szczególne y_1 tego równania

(a) $y' = e^{-t}y^2 - y + e^t$, $y_1(t) = e^t$,

(b) $y' = y^2 + \frac{1}{t}y + \frac{1}{t^2}$, $y_1(t) = -\frac{1}{t}$.