

1. Jakie równanie nazywamy równaniem różniczkowym liniowym rzędu $n \in \mathbb{N}$? Podać przykłady równań liniowych jednorodnych oraz niejednorodnych rzędu 2, 3 i 4.
2. Podać definicję układu fundamentalnego dla równania liniowego jednorodnego. Dane jest równanie $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, oraz funkcje $y_1(t)$, $y_2(t)$, które tworzą układ fundamentalny tego równania. Uzasadnić, że funkcje $u_1(t)$, $u_2(t)$ określone wzorami

$$(a) \quad u_1 = y_1 + y_2, \quad u_2 = y_1 - y_2; \quad (b) \quad u_1 = my_1 + y_2, \quad u_2 = y_1 + ny_2$$

tworzą również układ fundamentalny tego równania (w podpunkcie (b) dobrać odpowiednie parametry m i n).

3. Podać związki między wyznacznikiem Wrońskiego a liniową niezależnością układu funkcji. Obliczyć wyznaczniki Wrońskiego dla funkcji

$$a) \quad g_1(t) = t, \quad g_2(t) = t^2, \quad g_3(t) = t^3; \quad b) \quad g_1(t) = e^t, \quad g_2(t) = 2e^t, \quad g_3(t) = e^{-t}.$$

4. Sprawdzić, czy podane funkcje są liniowo niezależne

$$a) \quad g_1(t) = t, \quad g_2(t) = 2t, \quad g_3(t) = t^2, \quad b) \quad g_1(t) = e^t, \quad g_2(t) = te^t, \quad g_3(t) = t^2e^t.$$

5. Sformułować twierdzenie o postaci rozwiązania ogólnego równania różniczkowego liniowego jednorodnego.
6. Sprawdzić, że podane funkcje tworzą na zadanych przedziałach układy fundamentalne wskazanych równań różniczkowych. Znaleźć ogólne rozwiązania tych równań oraz rozwiązania problemów Cauchy'ego z zadanymi warunkami początkowymi

$$a) \quad y_1(t) = \sqrt{t}, \quad y_2(t) = \frac{1}{t}, \quad t \in (0, \infty), \quad y'' + \frac{3}{2t}y' - \frac{1}{2t^2}y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1;$$

$$b) \quad y_1(t) = t, \quad y_2(t) = e^t, \quad t \in (-\infty, 1), \quad y'' - \frac{t}{t-1}y' + \frac{1}{t-1}y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

7. Omówić sposób wyznaczania układu fundamentalnego dla równania różniczkowego liniowego jednorodnego o stałych współczynnikach. Wyznaczyć układ fundamentalny dla równania różniczkowego $y''' + 3y'' - 54y = 0$ wiedząc, że funkcja $y_1(t) = e^{3t}$ jest jedną z funkcji tego układu.
8. Sformułować twierdzenie o postaci rozwiązania ogólnego równania różniczkowego liniowego niejednorodnego. Omówić metodę uziemienniania stałych oraz metodę przewidywania.
9. Wyznaczyć rozwiązania ogólne podanych równań różniczkowych, wiedząc, że funkcje y_1, y_2 tworzą układy fundamentalne równań liniowych jednorodnych skojarzonych z tymi równaniami

$$a) \quad y'' + y' + e^{-2t}y = e^{-3t}, \quad y_1(t) = \cos e^{-t}, \quad y_2(t) = \sin e^{-t};$$

$$b) \quad y'' - 7y' + 10y = e^{3t}, \quad y_1(t) = e^{2t}, \quad y_2(t) = e^{5t}.$$

10. Rozwiązać równania

$$a) y^{(6)} + 2y^{(4)} + y'' = 0, \quad b) y^{(4)} + 2y''' - 2y' - y = 0, \quad c) y'' - 6y' + 9y = 0.$$

11. Mając dane pierwiastki równania charakterystycznego oraz funkcję $h(t)$ podać postać całki szczególnej równania liniowego niejednorodnego o stałych współczynnikach

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + a_3 y^{(n-3)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = h(t) :$$

- a) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, h(t) = (2t + 1)e^{-t};$
b) $\lambda_1 = \lambda_2 = 3 - 2i, \lambda_3 = \lambda_4 = 3 + 2i, h(t) = e^{3t} \sin 2t;$
c) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 0, \lambda_5 = 1 + i, \lambda_6 = 1 - i, h(t) = \sin t + \cos t + t + 3 + e^t \sin 2t.$

12. Rozwiązać równania korzystając z metody przewidywań

$$\begin{aligned} a) y''' - 5y'' + 4y' &= t, & b) y^{(4)} + y'' &= \sin t, \\ c) y'' - 2y' + y &= \sin t + e^{-t}, & d) y''' + 6y'' + 12y' + 8y &= 3e^{-2t}, \\ e) y'' - 2y' - 3y &= -4e^t + 3, & f) y'' - y &= 2 \sin t - 4 \cos t. \end{aligned}$$

13. Rozwiązać równania korzystając z metody uzmienniania stałych

$$a) y''' + y' = \frac{\sin t}{\cos^2 t}, \quad b) y'' - y' = \frac{2-t}{t^3} e^t, \quad c) y'' + y = \operatorname{tg} t.$$

14. Rozwiązać problemy Cauchy'ego

$$\begin{aligned} a) y'' + y &= t, \quad y(0) = 1, y'(0) = 0; \\ b) y''' + y'' - 5y' + 3y &= 0, \quad y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -2, \\ c) y^{(5)} + 6y^{(4)} - 3y &= 0, \quad y(1) = y'(1) = y''(1) = y'''(1) = y^{(4)}(1) = 0. \end{aligned}$$