

1. Podać definicję oryginału i przykłady funkcji będących oryginałami.
2. Podać definicję transformaty Laplace'a. Obliczyć z definicji transformatę funkcji jednostkowej.
3. Wymienić własności transformaty Laplace'a. Udowodnić wybrane trzy własności.
4. Podać przykłady zastosowań własności transformaty Laplace'a do wyznaczania transformat funkcji elementarnych.
5. Obliczyć z definicji transformaty Laplace'a podanych funkcji:

$$a) f(t) = \begin{cases} 2 & , \text{ dla } t \in [0, 1] \\ 0 & , \text{ dla } t > 1 \end{cases}, \quad b) g(t) = t^2.$$

6. Korzystając z własności transformaty Laplace'a, wyznaczyć transformaty podanych oryginałów:

$$a) f(t) = t^3 - \sin 4t, \quad b) f(t) = \cos^2 3t, \quad c) f(t) = (t + 2)^2, \\ d) f(t) = t^2 \sinh 2t, \quad e) f(t) = \frac{e^{-at} \sin t}{t}, \quad f) f(t) = te^t \cos t.$$

7. Wyznaczyć funkcje ciągłe, których transformaty Laplace'a są równe:

$$a) \frac{2}{s+7}, \quad b) \frac{s^2+1}{s^2(s^2-1)^2}, \quad c) \frac{s+9}{s^2+6s+13}, \\ d) \frac{2s+3}{s^3+4s^2+5s}, \quad e) \frac{-1}{(s+3)^2}, \quad f) \frac{s}{s^2+4s+5}.$$

8. Metodą operatorową rozwiązać problemy Cauchy'ego:

- (a) $y' - 2y = \sin t, y(0) = 0,$
- (b) $y'' - 2y' + y = 1 + t, y(0) = 0, y'(0) = 0,$
- (c) $y'' - 4y = 4t, y(0) = 1, y'(0) = 0,$
- (d) $y'' - 2y' = e^t(t^2 + t - 3), y(0) = 2, y'(0) = 2,$
- (e) $y'' - y = \sinh t, y(0) = 0, y'(0) = 0,$
- (f) $y''' + y' = \cos t, y(0) = 0, y'(0) = -2, y''(0) = 0,$
- (g) $y^{(4)} - y'' = 1, y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0,$
- (h) $y'' + 4y' + 13y = te^{-t}, y(0) = 0, y'(0) = 2,$
- (i) $\begin{cases} x' = -y \\ y' = -x \end{cases}, x(0) = 1, y(0) = -1;$
- (j) $\begin{cases} x' = -2y + 3t \\ y' = 2x + 4 \end{cases}, x(0) = 2, y(0) = 3;$
- (k) $\begin{cases} x' = -2x - 2y - 4z \\ y' = -2x + y - 2z \\ z' = 5x + 2y + 7z \end{cases}, x(0) = y(0) = z(0) = 1.$