

1. Podane równania sprowadzić do układów równań różniczkowych liniowych pierwszego rzędu

$$a) \ y''' - 5y'' + 4y' = t, \quad b) \ y^{(4)} + y'' = \sin t, \quad c) \ y'' - y' = \frac{2-t}{t^3}e^t,$$

$$d) \ y'' + y = \operatorname{tg} t, \quad e) \ y''' + y'' - 5y' + 3y = 0, \ y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -2.$$

2. Znaleźć macierze fundamentalne $Z(t)$ dla układów równań różniczkowych liniowych

$$a) \ \begin{cases} y_1' = -7y_1 + y_2 \\ y_2' = -2y_1 - 5y_2 \end{cases} ; \quad b) \ \begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases} ; \quad c) \ \begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + y_3 \\ y_2' = y_1 + y_2 - y_3 \\ y_3' = 2y_1 - y_2 \end{cases} ;$$

$$d) \ \begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = x - y \end{cases}.$$

3. Znaleźć rozwiązania podanych układów równań różniczkowych liniowych (dwoma metodami: metodą macierzową oraz przez sprowadzenie układu do równania liniowego wyższego rzędu)

$$(a) \ \begin{cases} y_1' = 3y_1 - 2y_2 \\ y_2' = y_1 + y_2 \end{cases}, \quad y_1(0) = 2, \ y_2(0) = 3$$

$$(b) \ \begin{cases} y_1' = 3y_1 + y_2 + 3y_3 \\ y_2' = -2y_1 - y_3 \\ y_3' = -2y_1 - 2y_2 + y_3 \end{cases}$$

$$(c) \ \begin{cases} x' = 3x + 6y + 7z \\ y' = x + 5y + 4z \\ z' = -x - 6y - 5z \end{cases}, \quad x(0) = z(0) = 0, \ y(0) = 1$$

$$(d) \ \begin{cases} x' = -5x + 2y + e^t \\ y' = x - 6y + e^{-2t} \end{cases}$$

$$(e) \ \begin{cases} x' = 2y - x + 1 \\ y' = 3y - 2x \end{cases}, \quad x(0) = 1, \ y(0) = -2$$

$$(f) \ \begin{cases} x' = 2x - y \\ y' = x + 2e^t \end{cases}$$

$$(g) \ \begin{cases} x' = x - y + 1 \\ y' = -x + y + 2 \end{cases}$$

$$(h) \ \begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = x - y + 8 \sin 2t \end{cases}$$

(wsk. przewidzieć rozwiązanie szczególne w postaci $x_s = A \sin 2t + B \cos 2t$,
 $y_s = C \sin 2t + D \cos 2t$)

$$(i) \ \begin{cases} x' = 3x - y + \sin t \\ y' = 2y - \cos t \end{cases}$$

(wsk. przewidzieć rozwiązanie szczególne w postaci $x_s = A \sin t + B \cos t$,
 $y_s = C \sin t + D \cos t$)

$$(j) \begin{cases} x' = 3x - y - 1 \\ y' = 2y + 2 \end{cases}$$

$$(k) \begin{cases} x' = 3x - y + \sin t - 1 \\ y' = 2y - \cos t + 2 \end{cases}$$

(wsk. skorzystać z rozwiązań układów z zadań (i) oraz (j))

$$(l) \begin{cases} x' = 2x \\ y' = 3x + 2y \\ z' = x + y + 2z \end{cases}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 2.$$

Odpowiedzi do zad.3 (a) $y_1(t) = 2e^{2t}(\cos t - 2 \sin t)$, $y_2(t) = e^{2t}(3 \cos t - \sin t)$,

(b) $y_1(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^t(-\cos 2t + \sin 2t) - C_3 e^t(\cos 2t + \sin 2t)$, $y_2(t) = -C_1 e^{2t} + C_2 e^t \cos 2t + C_3 e^t \sin 2t$, $y_3(t) = C_2 e^t \cos 2t + C_3 e^t \sin 2t$,

(c) $x(t) = -2e^{-t} + 2e^{2t}$, $y(t) = -e^{-t} + 2e^{2t}$, $z(t) = 2e^{-t} - 2e^{2t}$,

(g) $x(t) = C_1 + C_2 e^{2t} + \frac{3}{2}t + \frac{1}{4}$, $y(t) = C_1 - C_2 e^{2t} + \frac{3}{2}t - \frac{1}{4}$,

(h) $x(t) = 3C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} - 3 \sin 2t$, $y(t) = C_1 e^{2t} - C_2 e^{-2t} + \sin 2t - 2 \cos 2t$,

(i) $x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{2t} - \frac{2}{5} \sin t$, $y(t) = C_2 e^{2t} - \frac{1}{5} \sin t + \frac{2}{5} \cos t$,

(j) $x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{2t}$, $y(t) = C_2 e^{2t} - 1$,

(k) $x(t) = C_1 e^{3t} + C_2 e^{2t} - \frac{2}{5} \sin t$, $y(t) = C_2 e^{2t} - \frac{1}{5} \sin t + \frac{2}{5} \cos t - 1$,

(l) $x(t) = e^{2t}$, $y(t) = 3te^{2t}$, $z(t) = 2e^{2t} + te^{2t} + \frac{3}{2}t^2 e^{2t}$.