

1. Sprawdzić, czy podane funkcje są rozwiązaniami danych równań różniczkowych

a) $y(t) = \frac{\sin t}{t}$, $ty' + y = \cos t$;

b) $y(t) = t\sqrt{1-t^2}$, $yy' = t - 2t^3$;

c) $y(t) = \frac{3}{\cos t}$, $y' + y \operatorname{tg} t = 0$.

2. Sprawdzić, czy podane funkcje są rozwiązaniami ogólnymi danych równań różniczkowych

a) $y(t) = \frac{-1}{4t+C}$, $C \in \mathbb{R}$; $y' = 4y^2$;

b) $y(t) = \sqrt{2t^2 + Ct}$, $C \in \mathbb{R}$; $y' = \frac{2t^2+y^2}{2ty}$;

c) $y(t) = -(t+C)^2$, $C \in \mathbb{R}$; $y' = 2\sqrt{-y}$.

3. Pokazać, że dla dowolnej stałej $C \in \mathbb{R}$ funkcje

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{dla } t \leq C \\ (t-C)^3, & \text{dla } t > C \end{cases}, g(t) = \begin{cases} (t-C)^3, & \text{dla } t \leq C \\ 0, & \text{dla } t > C \end{cases} \text{ oraz } h(t) \equiv 0$$

są rozwiązaniami równania różniczkowego $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$. Czy to równanie ma jeszcze jakieś inne rozwiązania?

4. Stosując metodę geometryczną naszkicować przykładowe krzywe całkowe podanych równań różniczkowych

a) $y' = 2t + 3$, b) $y' = -\frac{y}{t}$, c) $y' = \frac{|t|}{t}$, d) $y' = \sqrt{2+y}$, e) $y' = \frac{1-y}{t}$,
f) $y' = t^2 + y^2 - 1$.

5. Scałkować równania

a) $y'(t) = \operatorname{ctg}^2 t$, b) $y'(t) = t \ln t$, c) $y'(t) = |2t|$,

d) $y'(t) = \operatorname{sgn} t$, gdzie $\operatorname{sgn} t = \begin{cases} -1 & , \text{ dla } t < 0 \\ 0 & , \text{ dla } t = 0 \\ 1 & , \text{ dla } t > 0 \end{cases}$.

6. Wyznaczyć całki szczególne danych równań różniczkowych spełniające podane warunki początkowe

a) $y'(t) = \sin t$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$;

b) $y'(t) = e^{-t}$, $y(1) = 1$;

c) $y'(t) = t^3 - 3t^2 + t - 1$, $y(-1) = -2$.

7. Wyznaczyć równania różniczkowe podanych rodzin krzywych ($C \in \mathbb{R}$)

a) $y = Ct^2 - t$, b) $(y-C)^2 = 2t$, c) $y = \operatorname{tg}(C+t)$, d) $t^2 = (C+y)e^y$.