

1. a) Co to znaczy, że problem Cauchy'ego jest jednoznaczny?
b) Ile rozwiązań określonych na $\mathbb{R}$ ma problem Cauchy'ego

$$\begin{cases} y' = 3y^{\frac{2}{3}} \\ y(1) = 0 \end{cases} ?$$

2. Czy przez każdy punkt $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ przechodzi jakaś krzywa całkowa równania $y' = y^3 + t^2$? Odpowiedź uzasadnić korzystając z twierdzenia Peano.
3. a) Sprawdzić, czy funkcja $f(t, y) = \sqrt{y} + t$ spełnia warunek Lipschitza względem drugiej zmiennej.
b) Czy wykresy dwóch różnych rozwiązań równania $y' = \sqrt{y} + t$ mogą się przecinać w jakimś punkcie $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ (*wsk. skorzystać z twierdzenia Picarda*)?
4. Sformułować twierdzenie Picarda o jednoznaczności rozwiązania problemu Cauchy'ego. Czy wykresy dwóch różnych rozwiązań równania $y' = y^3 + t + 1$ mogą przecinać się w jakimś punkcie $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$? Odpowiedź uzasadnić.
5. Sprawdzić, czy problem początkowy $y' = y^2 + 1$, $y(0) = 0$ ma rozwiązanie określone na całej prostej.
6. Obliczyć dwie pierwsze iteracje Picarda dla problemu Cauchy'ego $y' = t^2 + y^2$, $y(0) = 1$.
7. Obliczyć trzy pierwsze iteracje Picarda dla problemu Cauchy'ego $y' = e^t + y^2$, $y(0) = 0$.
8. Wyprowadzić wzór na n -tą iterację Picarda $y_n(t)$ i obliczyć jej granicę przy $n \rightarrow \infty$ dla problemu Cauchy'ego $y' = 2ty$, $y(0) = 1$.
9. Znaleźć funkcje $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające równania całkowe

$$\text{a) } y(t) = \int_1^t e^{-y(s)} ds, \quad \text{b) } y(t) = -1 + \int_1^t \frac{e^{y(s)}}{y(s)} ds.$$

10. Uzasadnić, że $y \equiv -1$ jest jedynym rozwiązaniem problemu Cauchy'ego $y' = t(1 + y)$, $y(0) = -1$.
11. Znaleźć wszystkie rozwiązania problemu Cauchy'ego $y' = t\sqrt{1 - y^2}$, $y(0) = 1$.
12. Dla problemu Cauchy'ego $y' = \sqrt{y - 1}$, $y(t_0) = y_0$ dobrać warunki początkowe tak, aby problem miał a) jednoznaczne rozwiązanie, b) nie miał rozwiązania, c) miał nieskończenie wiele rozwiązań.
13. Ile rozwiązań równania spełnia podany warunek początkowy:
a) $y' = 5y^{4/5}$, $y(1) = 1$,
b) $y' = 4|y|^{3/4}$, $y(1) = -1$.
14. Ile rozwiązań ma problem początkowy:

$$y' = f(t, y), \quad y(0) = 1, \text{ gdzie } f(t, y) = \begin{cases} 2 & \text{dla } y < 1 \\ 5 & \text{dla } y \geq 1 \end{cases} ?$$