

Równania różniczkowe. Zestaw 4

1. Znaleźć rozwiązania ogólne równań różniczkowych liniowych

$$a) y' - \frac{y}{t} = \ln t, \quad b) y' + \cos t \, y = \frac{1}{2} \sin 2t,$$

2. Rozwiązać problemy Cauchy'ego:

$$\begin{aligned} a) ty' + y &= e^t, \quad y(1) = 2; & b) \frac{1}{2} \sin 2t \, y' - y &= \sin^3 t, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0; \\ c) ty' + y &= \ln t + 1, \quad y(e) = 1; & d) y' + \sqrt{1+t^2} \, y &= 0, \quad y(0) = \sqrt{5}. \end{aligned}$$

3. Czy równanie $y' + 2ty = -e^{-t^2}$ posiada rozwiązanie takie, że $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} y(t) = 0$. Ile jest takich rozwiązań?

4. Znaleźć rozwiązanie równania $y' \sin t + y \cos t = 1$, ograniczone przy $t \rightarrow 0$.

5. Rozwiązać równania różniczkowe Bernoulliego

$$a) y' + \frac{ty}{1-t^2} = t\sqrt{y}, \quad b) ty' + y = y^2 \ln t.$$

6. Rozwiązać problemy Cauchy'ego

$$a) ty' + y = \frac{1}{y^2}, \quad y(1) = \sqrt[3]{2}, \quad b) y' + \frac{y}{t} = y^2 \ln t, \quad y(1) = 0.$$

7. Rozwiązać równanie różniczkowe Riccatiego mając dane rozwiązanie szczególne y_1 tego równania

$$\begin{aligned} (a) \quad y' &= e^{-t}y^2 - y + e^t, \quad y_1(t) = e^t, \\ (b) \quad y' &= y^2 + \frac{1}{t}y + \frac{1}{t^2}, \quad y_1(t) = -\frac{1}{t}. \end{aligned}$$

8. Rozwiązać równania

$$\begin{aligned} (a) \quad y' + e^{-t}y^2 + y &= 3e^t, \\ (b) \quad ty' &= t^2 + y - \frac{1}{t}, \\ (c) \quad y' - \frac{3}{2t}y &= -2y^3, \\ (d) \quad 5ty^4y' &= y^5 + 4, \\ (e) \quad t^4dy &= (2 - t^3y)dt, \\ (f) \quad y' &= \frac{y^2}{4} + \frac{1}{t^2}. \end{aligned}$$