INFS GGiOŚ, sem. letni 2017/18

Równania różniczkowe. Zestaw 5

1. Rozwiązać równania różniczkowe zupełne

   (a) $(2t\sin y - y^2\sin t)dt + (t^2\cos y + 2y\cos t + 1)dy = 0$,

   (b) $(1 + e^{\frac{t}{y}})dt + e^{\frac{t}{y}}(1 - \frac{t}{y})dy = 0$,

   (c) $(t + \frac{y}{t^2+y^2})dt + \left(y - \frac{t}{t^2+y^2}\right)dy = 0$.

2. Rozwiązać problemy Cauchy'ego dla równań różniczkowych zupełnych

   (a) $\sin 2y\; dt + \cos 2y(2t+1)dy = 0, \quad y(0) = \frac{\pi}{4}$,

   (b) $\frac{y}{t}dt + (y^3 + \ln t)dy = 0, \quad y(1) = 2$,

   (c) $\left(1 - \frac{y}{t^2} - y\right)dt + \left(\frac{1}{t} - t - 2y\right)dy = 0, \quad y(1) = 0$.

3. Co to jest czynnik całkujący? Sprawdzić, czy równanie $(t^2 + y)\,dt - t\,dy = 0$ ma czynnik całkujący, będący funkcją jednej zmiennej.

4. Sprawdzić, że podana funkcja $\mu = \mu(t, y)$ jest czynnikiem całkującym równania, a następnie rozwiązać je

   (a) $-y^2dt + (t^2 + ty)dy = 0,\ \mu(t, y) = \frac{1}{t^2y}$,

   (b) $(-\mathrm{ctg}(ty) + ty)dt + t^2dy = 0,\ \mu(t, y) = \sin(ty)$

5. Scałkować równania wiedząc, że mają one czynniki całkujące jednej zmiennej

   (a) $(3t^2y + 2ty + y^3)dt + (t^2 + y^2)dy = 0$,

   (b) $\left(\frac{t}{y} + 1\right)dt + \left(\frac{t}{y} - 1\right)dy = 0$.

6. Rozwiązać następujące równania za pomocą jednego z czynników całkujących postaci: $\mu = \mu(t + y)$, $\mu = \mu(ty)$, $\mu = \mu(t^2 - y^2)$, $\mu = \mu(t^2 + y^2)$:

   (a) $t^2y^3 + y + (t^3y^2 - t)y' = 0$,

   (b) $t\left(4 + \frac{1}{t^2-y^2}\right)dt - y\left(4 - \frac{1}{t^2-y^2}\right)dy = 0$,

   (c) $(t^2 + y)dy + (t - ty)dt = 0$,

   (d) $\left(2y + \frac{1}{(t+y)^2}\right)dt + \left(3y + t + \frac{1}{(t+y)^2}\right)dy = 0$.

7. Rozwiązać równania

   (a) $ty'' + ty'^{\,2} + y' = 0,\ t \neq 0$,

   (b) $y'' = \frac{y'}{t}\ln\frac{y'}{t} + \frac{y'}{t}$,

   (c) $yy'' + y^2y' = y'^{\,2}$,

   (d) $t^4y''' + 2t^3y'' = 1$,

   (e) $(y'')^2 = 4(y' - 1)$,

   (f) $y''' = -\frac{1}{2}(y'')^3$,

   (g) $y'' = y^2 + 1$.