

1. Obliczyć wyznaczniki Wronskiego dla funkcji

a) $y_1(t) = t, y_2(t) = t^2, y_3(t) = t^3$; b) $y_1(t) = e^t, y_2(t) = 2e^t, y_3(t) = e^{-t}$.

2. Sprawdzić, czy podane funkcje są liniowo niezależne

a) $y_1(t) = t, y_2(t) = 2t, y_3(t) = t^2$, b) $y_1(t) = e^t, y_2(t) = te^t, y_3(t) = t^2e^t$.

3. Sprawdzić, że podane funkcje tworzą na zadanych przedziałach układy fundamentalne wskazanych równań różniczkowych. Znaleźć ogólne rozwiązania tych równań oraz rozwiązania problemów Cauchy'ego z zadanymi warunkami początkowymi

a) $y_1(t) = \sqrt{t}, y_2(t) = \frac{1}{t}, t \in (0, \infty), y'' + \frac{3}{2t}y' - \frac{1}{2t^2}y = 0, y(1) = 1, y'(1) = 1$;

b) $y_1(t) = t, y_2(t) = e^t, t \in (-\infty, 1), y'' - \frac{t}{t-1}y' + \frac{1}{t-1}y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$.

4. Wyznaczyć układ fundamentalny dla równania różniczkowego $y''' + 3y'' - 54y = 0$ wiedząc, że funkcja $y_1(t) = e^{3t}$ jest jedną z funkcji tego układu.

5. Wyznaczyć rozwiązania ogólne podanych równań różniczkowych, wiedząc, że funkcje y_1, y_2 tworzą układy fundamentalne równań liniowych jednorodnych skojarzonych z tymi równaniami

a) $y'' + y' + e^{-2t}y = e^{-3t}, y_1(t) = \cos e^{-t}, y_2(t) = \sin e^{-t}$;

b) $y'' - 7y' + 10y = e^{3t}, y_1(t) = e^{2t}, y_2(t) = e^{5t}$.

6. Rozwiązać równania

a) $y^{(6)} + 2y^{(4)} + y'' = 0$, b) $y^{(4)} + 2y''' - 2y' - y = 0$, c) $y'' - 6y' + 9y = 0$.

7. Mając dane pierwiastki równania charakterystycznego oraz funkcję $h(t)$ podać postać całki szczególnej równania liniowego niejednorodnego o stałych współczynnikach

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + a_3y^{(n-3)} + \dots + a_{n-1}y' + a_ny = h(t) :$$

a) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, h(t) = (2t + 1)e^{-t}$;

b) $\lambda_1 = \lambda_2 = 3 - 2i, \lambda_3 = \lambda_4 = 3 + 2i, h(t) = e^{3t} \sin 2t$;

c) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \lambda_4 = 0, \lambda_5 = 1 + i, \lambda_6 = 1 - i, h(t) = \sin t + \cos t + t + 3 + e^t \sin 2t$.

8. Rozwiązać równania korzystając z metody przewidywań

a) $y''' - 5y'' + 4y' = t$, b) $y^{(4)} + y'' = \sin t$,

c) $y'' - 2y' + y = \sin t + e^{-t}$, d) $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 3e^{-2t}$,

e) $y'' - 2y' - 3y = -4e^t + 3$, f) $y'' - y = 2 \sin t - 4 \cos t$.

9. Rozwiązać równania korzystając z metody uzmienniania stałych

a) $y''' + y' = \frac{\sin t}{\cos^2 t}$, b) $y'' - y' = \frac{2-t}{t^3}e^t$, c) $y'' + y = \operatorname{tg} t$.

10. Rozwiązać problemy Cauchy'ego

a) $y'' + y = t, y(0) = 1, y'(0) = 0$;

b) $y''' + y'' - 5y' + 3y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -2$,

c) $y^{(5)} + 6y^{(4)} - 3y = 0, y(1) = y'(1) = y''(1) = y'''(1) = y^{(4)}(1) = 0$.