Równania różniczkowe. Zestaw 7

1. Podać definicję oryginału i przykłady funkcji będących oryginałami.
2. Podać definicję transformaty Laplace'a. Obliczyć z definicji transformatę funkcji jednostkowej.
3. Wymienić własności transformaty Laplace'a. Udowodnić wybrane trzy własności.
4. Podać przykłady zastosowań własności transformaty Laplace'a do wyznaczania transformat funkcji elementarnych.
5. Obliczyć z definicji transformaty Laplace'a podanych funkcji:

$$a)\ \ f(t) = \begin{cases} 2 & , \ \text{dla } \ t \in [0,1] \\ 0 & , \ \text{dla } \ t > 1 \end{cases}, \qquad\qquad b)\ \ g(t) = t^2.$$

6. Korzystając z własności transformaty Laplace'a, wyznaczyć transformaty podanych oryginałów:

$$a)\ \ f(t) = t^3 - \sin 4t, \quad b)\ \ f(t) = \cos^2 3t, \quad c)\ \ f(t) = (t+2)^2,$$

$$d)\ \ f(t) = t^2 \sinh 2t, \quad e)\ \ f(t) = \frac{e^{-at}\sin t}{t}, \quad f)\ \ f(t) = te^t \cos t.$$

7. Wyznaczyć funkcje ciągłe, których transformaty Laplace'a są równe:

$$a)\ \ \frac{2}{s+7}, \qquad b)\ \ \frac{s^2+1}{s^2(s^2-1)^2}, \qquad c)\ \ \frac{s+9}{s^2+6s+13},$$

$$d)\ \ \frac{2s+3}{s^3+4s^2+5s}, \qquad e)\ \ \frac{-1}{(s+3)^2}, \qquad f)\ \ \frac{s}{s^2+4s+5}.$$

8. Metodą operatorową rozwiązać problemy Cauchy'ego:

   (a) $y' - 2y = \sin t,\ y(0) = 0,$

   (b) $y'' - 2y' + y = 1 + t,\ y(0) = 0, y'(0) = 0,$

   (c) $y'' - 4y = 4t,\ y(0) = 1, y'(0) = 0,$

   (d) $y'' - 2y' = e^t(t^2 + t - 3),\ y(0) = 2, y'(0) = 2,$

   (e) $y'' - y = \sinh t,\ y(0) = 0, y'(0) = 0,$

   (f) $y''' + y' = \cos t,\ y(0) = 0, y'(0) = -2, y''(0) = 0,$

   (g) $y^{(4)} - y'' = 1,\ y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0,$

   (h) $y'' + 4y' + 13y = te^{-t},\ y(0) = 0, y'(0) = 2.$

   (i) $\begin{cases} x' = & -y \\ y' = & -x \end{cases},\ \ x(0) = 1,\ y(0) = -1;$

   (j) $\begin{cases} x' = & -2y + 3t \\ y' = & 2x + 4 \end{cases},\ \ x(0) = 2,\ y(0) = 3;$

   (k) $\begin{cases} x' = & -2x - 2y - 4z \\ y' = & -2x + y - 2z \\ z' = & 5x + 2y + 7z \end{cases},\ \ x(0) = y(0) = z(0) = 1.$