Równania różniczkowe. Zestaw 8

1. Podane równania sprowadzić do układów równań różniczkowych liniowych pierwszego rzędu

$$a)\ y''' - 5y'' + 4y' = t, \qquad b)\ y^{(4)} + y'' = \sin t, \qquad c)\ y'' - y' = \frac{2-t}{t^3}e^t,$$

$$d)\ y'' + y = \mathrm{tg}\, t, \qquad e)\ y''' + y'' - 5y' + 3y = 0,\ y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = -2.$$

2. Znaleźć macierze fundamentalne $Z(t)$ dla układów równań różniczkowych liniowych

$$a)\ \begin{cases} y_1' = & -7y_1 + y_2 \\ y_2' = & -2y_1 - 5y_2 \end{cases}; \qquad b)\ \begin{cases} x' = & y \\ y' = & -x \end{cases}; \qquad c)\ \begin{cases} y_1' = & y_1 - y_2 + y_3 \\ y_2' = & y_1 + y_2 - y_3 \\ y_3' = & 2y_1 - y_2 \end{cases};$$

$$d)\ \begin{cases} x' = & x + 3y \\ y' = & x - y \end{cases}.$$

3. Znaleźć rozwiązania podanych układów równań różniczkowych liniowych (dwiema metodami: metodą macierzową oraz przez sprowadzenie układu do równania liniowego wyższego rzędu)

$$\text{(a)}\ \begin{cases} y_1' = & 3y_1 - 2y_2 \\ y_2' = & y_1 + y_2 \end{cases}, \quad y_1(0) = 2,\ y_2(0) = 3$$

$$\text{(b)}\ \begin{cases} y_1' = & 3y_1 + y_2 + 3y_3 \\ y_2' = & -2y_1 - y_3 \\ y_3' = & -2y_1 - 2y_2 + y_3 \end{cases}$$

$$\text{(c)}\ \begin{cases} x' = & 3x + 6y + 7z \\ y' = & x + 5y + 4z \\ z' = & -x - 6y - 5z \end{cases}, \quad x(0) = z(0) = 0,\ y(0) = 1$$

$$\text{(d)}\ \begin{cases} x' = & -5x + 2y + e^t \\ y' = & x - 6y + e^{-2t} \end{cases}$$

$$\text{(e)}\ \begin{cases} x' = & 2y - x + 1 \\ y' = & 3y - 2x \end{cases}, \quad x(0) = 1,\ y(0) = -2$$

$$\text{(f)}\ \begin{cases} x' = & 2x - y \\ y' = & x + 2e^t \end{cases}$$

$$\text{(g)}\ \begin{cases} x' = & x - y + 1 \\ y' = & -x + y + 2 \end{cases}$$

$$\text{(h)}\ \begin{cases} x' = & x + 3y \\ y' = & x - y + 8\sin 2t \end{cases}$$

(*wsk. przewidzieć rozwiązanie szczególne w postaci* $x_s = A\sin 2t + B\cos 2t$, $y_s = C\sin 2t + D\cos 2t$)

$$\text{(i)}\ \begin{cases} x' = & 3x - y + \sin t \\ y' = & 2y - \cos t \end{cases}$$

(*wsk. przewidzieć rozwiązanie szczególne w postaci* $x_s = A\sin t + B\cos t$, $y_s = C\sin t + D\cos t$)

(j) $\begin{cases} x' = & 3x - y - 1 \\ y' = & 2y + 2 \end{cases}$

(k) $\begin{cases} x' = & 3x - y + \sin t - 1 \\ y' = & 2y - \cos t + 2 \end{cases}$

(*wsk. skorzystać z rozwiązań układów z zadań (i) oraz (j)*)

(l) $\begin{cases} x' = & 2x \\ y' = & 3x + 2y \\ z' = & x + y + 2z \end{cases}, \quad x(0) = 1,\ y(0) = 0,\ z(0) = 2.$

Odpowiedzi do zad.3 (a) $y_1(t) = 2e^{2t}(\cos t - 2\sin t),\ \ y_2(t) = e^{2t}(3\cos t - \sin t)$,

(b) $y_1(t) = C_1e^{2t} + C_2e^t(-\cos 2t + \sin 2t) - C_3e^t(\cos 2t + \sin 2t),\ \ y_2(t) = -C_1e^{2t} + C_2e^t\cos 2t + C_3e^t\sin 2t,\ \ y_3(t) = C_2e^t\cos 2t + C_3e^t\sin 2t$,

(c) $x(t) = -2e^{-t} + 2e^{2t},\ \ y(t) = -e^{-t} + 2e^{2t},\ \ z(t) = 2e^{-t} - 2e^{2t}$,

(g) $x(t) = C_1 + C_2e^{2t} + \frac{3}{2}t + \frac{1}{4},\ \ y(t) = C_1 - C_2e^{2t} + \frac{3}{2}t - \frac{1}{4}$,

(h) $x(t) = 3C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} - 3\sin 2t,\ \ y(t) = C_1e^{2t} - C_2e^{-2t} + \sin 2t - 2\cos 2t$,

(i) $x(t) = C_1e^{3t} + C_2e^{2t} - \frac{2}{5}\sin t,\ \ y(t) = C_2e^{2t} - \frac{1}{5}\sin t + \frac{2}{5}\cos t$,

(j) $x(t) = C_1e^{3t} + C_2e^{2t},\ \ y(t) = C_2e^{2t} - 1$,

(k) $x(t) = C_1e^{3t} + C_2e^{2t} - \frac{2}{5}\sin t,\ \ y(t) = C_2e^{2t} - \frac{1}{5}\sin t + \frac{2}{5}\cos t - 1$,

(l) $x(t) = e^{2t},\ \ y(t) = 3te^{2t},\ \ z(t) = 2e^{2t} + te^{2t} + \frac{3}{2}t^2e^{2t}$.