

Przykładowe zadania z egzaminów i zaliczeń poprawkowych

1. Rozwiąż podane problemy Cauchy'ego. Rozwiązania podaj w jawnej postaci.

a) $y' = \frac{4t^2 + ty + y^2}{t^2}, \quad y(1) = 2;$

b) $\frac{y'}{\cos(t^2)} - 2te^{-y} = 0, \quad y(0) = 1.$

2. Rozwiąż równania

a) $y^{(4)} + 4y'' + 4y = 18e^t,$

b) $(4t^3y^3 + 2t \ln t - ye^{ty})dt + (3t^4y^2 - te^{ty} - y)dy = 0.$

3. Rozwiąż podany problem Cauchy'ego metodą operatorową

$$\begin{cases} x' = 6x - 13y \\ y' = x \\ z' = 4z \end{cases}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 4.$$

4. Rozwiąż problem Cauchy'ego

$$ty' + 4y = t^3y^2, \quad y(0) = 0.$$

5. Rozwiąż równania

a) $y^{(5)} - y' = 6t^2 + t + 1,$

b) $(1 - \frac{1}{t} \arctg \frac{y}{2})dt + (t^2 \ln y + \frac{1}{4+y^2})dy = 0.$

6. Rozwiąż podany problem Cauchy'ego metodą operatorową

$$\begin{cases} x' = 6x - 18z \\ y' = 5y + e^{5t} \\ z' = x \end{cases}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2, \quad z(0) = 0.$$

7. Co to jest krzywa całkowa? Narysuj przykładowe krzywe całkowe dla równania

$y' = \sqrt{-y}$. Czy istnieją punkty $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ w których różne krzywe całkowe tego równania mogą się przecinać? Odpowiedź uzasadnij.

8. Niech funkcja $f(t)$ będzie oryginałem, a $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ jej obrazem. Uzupełnij poniższe równości – własności transformaty Laplace'a.

A. $\mathcal{L}[f(3t)] =$ **B.** $\mathcal{L}[f''(t)] =$ **C.** $\mathcal{L}[t^3 f(t)] =$

9. Rozwiąż problemy Cauchy'ego

a) $y' + 9te^{y+3t} = 0, \quad y(0) = -1;$

b) $y' + 2\frac{z}{t} = \frac{\ln t}{t}, \quad y(1) = -\frac{1}{4}.$

10. Rozwiąż równania

a) $y'' + 4y = \cos t,$

b) $(\frac{t}{y} - 1)dt + (2e^{2y} - 1 - \frac{t}{y})dy = 0.$

11. Rozwiąż podany problem Cauchy'ego metodą operatorową

$$\begin{cases} x' = 8x - 25z \\ y' = 5y + \cos t - 5 \sin t \\ z' = x \end{cases}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2, \quad z(0) = 1.$$

12. Rozwiąż problem Cauchy'ego

$$y' = \frac{y}{t} + \frac{y-t}{y+t}, \quad y(1) = 1.$$

13. Rozwiąż równanie

$$y' - \frac{ty}{t^2 + 1} = \frac{1}{2y}.$$

14. Korzystając z metody przewidywania znajdź rozwiązanie ogólne równania

$$y''' - 4y'' + 5y' = 10t.$$

15. Rozwiąż problem Cauchy'ego dla układu równań różniczkowych liniowych

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = y + z \\ z' = z \end{cases}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 1.$$

16. Ile rozwiązań określonych na $\mathbb{R}$ ma problem Cauchy'ego $y' = 2\sqrt{y}$, $y(0) = 1$.

17. Niech funkcja $f(t)$ będzie oryginałem, a $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ jej obrazem, $a > 0$ pewną stałą. Uzupełnij poniższe równości – własności transformaty Laplace'a.

$$\text{A. } \mathcal{L}[e^{at}f(t)] = \quad \text{B. } \mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = \quad \text{C. } \mathcal{L}[(-1)^n t^n f(t)] =$$

18. Rozwiąż problemy Cauchy'ego

$$a) \quad y' = \frac{4t^2 + 3y^2}{2ty}, \quad y(1) = -1;$$

$$b) \quad y' = 2 + \sqrt{y - 2t + 3}, \quad y(0) = 1.$$

19. (18 pkt.) Rozwiąż równania

$$a) \quad y''' + y' = e^{2t} + t,$$

$$b) \quad (2 \ln t - 1 - \frac{y}{t})dt + (\frac{y}{t} - 1)dy = 0.$$

20. Rozwiąż podany problem Cauchy'ego metodą operatorową

$$\begin{cases} x' = z - t - 1 \\ y' = 2y + \cos t - 2 \sin t \\ z' = x + t \end{cases}, \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 5, \quad z(0) = 0.$$

21. Ile rozwiązań określonych na $\mathbb{R}$ ma problem Cauchy'ego

$$\begin{cases} y' = t|y| \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Odpowiedź uzasadnij.

22. Sformułuj warunek konieczny i wystarczający na to, aby równanie było równaniem różniczkowym zupełnym.