1. Wykonać działania, wynik zapisać w postaci algebraicznej $a+bi$.

   a) $3+5i-(2+2i)(-1-i)$, b) $\frac{1}{2+i}+\frac{1-i}{i}$, c) $\frac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$.

2. Wyznaczyć

   a) $\mathrm{Re}[(2+i)^2+3i(7-5i)]$, b) $\mathrm{Im}\left[\frac{(1+i)i-i}{i}\right]$, c) $|(1+2i)^2|$, d) $\overline{\frac{(5+i)}{(2+i)^2(1-3i)}}$.

3. Wyznaczyć moduł, część rzeczywistą i część urojoną liczb:

   a) $1+i+i^2+i^3+i^4+i^5+i^6$, b) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3-\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$.

4. W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać równania:

   a) $z\bar{z}+z-\bar{z}=3+2i$, b) $i(z+\bar{z})+i(z-\bar{z})=2i-3$, c) $|z|+z=8+4i$,
   d) $z^2-12\bar{z}+61=0$.

5. Dla jakich $z\in\mathbb{C}$ zachodzą równości
   a) $z^2=|z|^2$; b) $|z^2|=|z|^2$?

6. W zbiorze liczb zespolonych rozwiązać układ równań:

$$\begin{cases} iz+(1+i)w=2+2i \\ 2iz+(3+2i)w=5+3i \end{cases}$$

7. Niech $w=\frac{z}{iz+4}$. Narysować zbiór wszystkich liczb zespolonych z, dla których
   a) liczba w jest rzeczywista, b) liczba w jest czysto urojona.

8. Zaznaczyć na płaszczyźnie zespolonej zbiory:

$$A=\left\{z\in\mathbb{C}:\ \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{4}\ \wedge\ \frac{3}{2}\pi\le \mathrm{Arg}z\le 2\pi\right\},\quad B=\left\{z\in\mathbb{C}:\ \mathrm{Re}\left(z^2\right)+(\mathrm{Im}z)^2\le 3\right\},$$

$$C=\left\{z\in\mathbb{C}:\ \left|\frac{8i-6}{z-2i}\right|\ge 5\ \wedge\ \frac{\pi}{2}\le \mathrm{Arg}(z^2)\le\pi\right\},\quad D=\left\{z\in\mathbb{C}:\ \frac{z-\bar{z}}{2i}=5\frac{z+\bar{z}}{2}-3\right\}.$$

9. Przedstawić w postaci trygonometrycznej liczby:
   $z_1=-5i$, $z_2=-6$, $z_3=5+5i$, $z_4=-1+i\sqrt{3}$, $z_5=\frac{1+i}{i}$, $z_6=\overline{(1+i\sqrt{3})i}$,
   $z_7=\sqrt{3}-i$, $z_8=\frac{1}{(1-i)^2}$.

10. Obliczyć:
    a) $(1+i\sqrt{3})^{100}$, b) $(i^{19}-i^7)i^{17}$, *c)* $(\bar{i})^{29}$, *d)* $\left(\frac{6}{\sqrt{3}+i}\right)^6$, *e)* $\sqrt[4]{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}$,
    f) $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}i-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{18}$.

11. Odgadując jeden z pierwiastków obliczyć pozostałe $\sqrt[3]{-27i}$, $\sqrt[4]{(2-2i)^{12}}$.

12. Obliczyć $\sqrt{8+6i}$ i $\sqrt{8-6i}$, wyniki zapisać w postaci algebraicznej.
    Podać wszystkie liczby należące do zbioru $\sqrt{8+6i}+\sqrt{8-6i}$ (*przypomnijmy* $A+B:=\{a+b\ :\ a\in A\ \wedge\ b\in B\}$). Ile ich jest?

13. Rozwiązać równania:
    a) $2z^2-2(1+i)z+2+i=0$,
    d) $z^5+\frac{(1+i)^{32}}{2(1-i\sqrt{3})^{15}}\frac{1-i}{1+i}=0$, e) $z^4-3z^2+4=0$, f) $z^6=(1+3i)^{12}$, g) $(z+i)^3=\frac{\sqrt{3}+i}{-1+i\sqrt{3}}$.

14. Znaleźć liczbę z_0^{15}, gdy z_0 jest pierwiastkiem równania $|z|-z=1+i\sqrt{3}$.

15. Korzystając ze wzorów de Moivre'a wyrazić $\cos 4x$ oraz $\sin 4x$ przez funkcje $\sin x$ oraz $\cos x$.

16. Przedstawić w postaci wykładniczej liczby:
a) $8i$, b) $2-2i$, c) $(-\sqrt{3}+i)^3$, d) $(1+i)^{20}$.

17. Stosując postać wykładniczą liczby zespolonej rozwiązać równania
a) $z^3 = 8i$, b) $z^4 = -4$.

18. Rozważmy wielomian $w(z) = z^6 + z^4 - z^2 - 1$, $z \in \mathbb{C}$. Czy liczba i jest pierwiastkiem tego wielomianu? Jeśli tak, jaka jest krotność tego pierwiastka?

19. Wiedząc, że $z_1 = 1 + i$ jest jednym z pierwiastków wielomianu

$$W(z) = az^3 + bz + 1, \qquad \text{gdzie} \quad \mathrm{a, b} \in \mathbb{R},$$

znaleźć współczynniki a, b oraz pozostałe pierwiastki.