Zestaw 3 - Macierze

1. Dla macierzy $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ wyznacz (o ile to możliwe) macierze:
   a) $2A - B$, b) $A + 3B - I$, c) AB, d) AB^T, e) $(A^TB)^2$, f) $AA^T - 4I$, g) $A^TA - 4I$.

2. *Macierze A i B nazywamy przemiennymi, jeśli* $AB = BA$. Wyznacz wszystkie macierze przemienne z macierzą $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

3. Oblicz $A^6 + A$ oraz $B^{15} + B$ dla macierzy $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4. *Macierz A spełniającą warunek* $A = A^T$ *nazywamy macierzą symetryczną.* Podaj przykład macierzy symetrycznej. Uzasadnij, że dla dowolnej macierzy kwadratowej B macierz $B + B^T$ jest macierzą symetryczną.

5. Wyznacz wszystkie macierze A trójkątne górne stopnia 2, które spełniają warunek $AA^T = I$.

6. Rozwiąż równania macierzowe

   a) $2X \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + X \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

   b) $X - iX^T = \begin{bmatrix} 4i & 0 \\ 6-2i & -2 \end{bmatrix}$, $\quad$ c) $\left(\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} + 4X \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

7. Oblicz wyznaczniki macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 7 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 7 & 0 & 2 \\ -3 & -2 & 4 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

8. Jaką wartość może mieć wyznacznik macierzy rzeczywistej A stopnia n, jeśli A spełnia równanie $A^2 = 8A^{-1}$.

9. Oblicz wyznacznik macierzy $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{2} \\ 2 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.
   Podaj wartość wyznacznika macierzy $B = 3A^{-1}A^T$.

10. Oblicz wyznaczniki macierzy $C = AB^T$ oraz $D = \frac{1}{5}AB$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & \sqrt{5} & 145 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 14 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & \sqrt{6} \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 6 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 13 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

11. Wyznacz macierz odwrotną do macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{bmatrix}.$$

12. Wyznacz macierz odwrotną do macierzy A, a następnie rozwiąż równanie macierzowe $XA = B^T$, gdzie

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

13. Dane są macierze $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

a) Wyznacz macierz odwrotną do macierzy B,
b) rozwiąż równanie macierzowe $\left(\frac{1}{2}A + X\right)^{-1} = B$.

14. Sprawdź czy macierz

$$A = \begin{bmatrix} \cos x & 0 & \sin x \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin x & 0 & \cos x \end{bmatrix}$$

jest ortogonalna, tzn. $A^T = A^{-1}$.

15. Wyznacz rzędy macierzy

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad b) \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 7 & 13 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \\ 8 & 5 & 5 & 14 \\ -4 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad c) \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 & -5 \\ 45 & 15 & 30 & -60 & 75 \\ 5 & 3 & 2 & -8 & 7 \end{bmatrix}.$$