ET IA, Algebra

Zestaw 5 - Przestrzenie liniowe. Przekształcenia liniowe

1. Sprawdzić, który ze zbiorów jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni $\mathbb{R}^3$:
   a) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 3x^2 + 5xy - 2y^2 = 0 \ \wedge \ z = 1\}$,
   b) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2x + y = 0 \ \wedge \ z - y = 0\}$.

2. Zbadać liniową niezależność wektorów $v_1(x) = 1 - x^2$, $v_2(x) = 1 + x^3$, $v_3(x) = x - x^3$, $v_4(x) = 1 + x + x^2 + x^3$ w przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}_3[x]$.

3. W przestrzeni wektorowej V wektory v_1, v_2, v_3 są liniowo niezależne. Zbadać liniową niezależność wektorów $w_1 = v_1 + v_2$, $w_2 = v_1 + v_3$, $w_3 = v_2 + v_3$.

4. Dane są wektory: $v_1 = (2, 4, 0)$, $v_2 = (a, 0, b)$, $v_3 = (0, c, 2) \in \mathbb{R}^3$. Czy można dobrać stałe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tak, aby wektory v_1, v_2, v_3 były liniowo zależne?

5. Sprawdzić, który z układów wektorów jest bazą przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^3$:
   a) $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (2, 1, 2)$, $v_3 = (0, 1, 1)$,
   b) $w_1 = (3, -1, 1)$, $w_2 = (-1, 2, 5)$, $w_3 = (1, 2, 1)$.

6. Dane są wektory: $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (1, 0, 4)$, $v_3 = (1, 5, 2)$, $w = (1, 2, -1) \in \mathbb{R}^3$. Wyznaczyć współrzędne wektora w w bazie $\{v_1, \ v_2, \ v_3\}$. Czy można w tej bazie wymienić wektor v_1 na w?

7. Wykazać, że zbiór $X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2x + 3y + z = 0\}$ jest podprzestrzenią wektorową przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Wyznaczyć dowolną bazę tej podprzestrzeni oraz podać wymiar.

8. Odwzorowanie $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ określone jest wzorem $L(x, y, z) = (y - z, x + y)$. Wykazać, że L jest odwzorowaniem liniowym. Wyznaczyć jądro i obraz odwzorowania L. Sprawdzić, czy L jest monomorfizmem.

9. Wyznaczyć w bazach kanonicznych macierz odwzorowania liniowego $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ danego wzorem $L(x, y, z, t) = (2x - 3y + z - 2t, 2y - 3t, x - 2z)$. Wyznaczyć jądro tego przekształcenia. Jaki jest wymiar obrazu L, czy L jest epimorfizmem?

10. Macierzą odwzorowania $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ w bazach $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} = \{(1, 2, 0), \ (1, 1, 0), \ (0, 0, 1)\}$, w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ i $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = \{(1, 2), \ (0, 1)\}$ w przestrzeni $\mathbb{R}^2$ jest macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Znaleźć $f(1, 0, 2)$.

11. Dane jest odwzorowanie liniowe $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z, t) = (x + 2z + t, -2x + y - 3z - 5t, x - y + z + 4t)$. Wyznaczyć $Kerf$, Imf oraz ich bazy. Podać $dim\ Imf$.

12. Przekształcenie $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ określone jest wzorem $f(x, y, z) = (y + z, 2x)$. Wykazać, że f jest odwzorowaniem liniowym. Znaleźć macierz tego przekształcenia, jeśli w $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$ zadano bazy jak w zadaniu 10.