Pytania kontrolne do wykładu z algebry

Liczby zespolone

1. Podaj definicję iloczynu kartezjańskiego zbiorów. Wyznacz zbiór $A \times B$, dla $A = (-1, 3]$, $B = \{1\} \cup [2, 4)$.
2. Podaj definicję liczby zespolonej. W jakiej postaci można zapisać liczbę zespoloną? Liczbę $(-2, 2)$ zapisz we wszystkich znanych postaciach.
3. Podaj definicję liczby sprzężonej i wymień własności sprzężenia.
4. Podaj dwie wielkości, które geometrycznie charakteryzują liczby zespolone. Wymień ich własności. Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zbiory liczb $z \in \mathbb{C}$ spełniających warunki $|z - z_0| = r$, $|z - z_0| \le r$, $r \le |z - z_0| \le R$, gdzie $r, R > 0$, $z_0 \in \mathbb{C}$ są ustalone.
5. Podaj wzory na iloczyn i iloraz liczb zespolonych w postaci trygonometrycznej. Ile wynosi $\mathrm{Arg}(\frac{z_1}{z_2})$, jeśli $\mathrm{Arg} z_1 = \frac{2}{5}\pi$, $\mathrm{Arg} z_2 = \frac{3}{2}\pi$?
6. a) Zapisz w postaci algebraicznej liczbę, której moduł jest równy 2, a argument główny $\pi/6$;
   b) Zapisz w postaci trygonometrycznej i wykładniczej liczbę $5 - 5i$;
   c) Zapisz w postaci algebraicznej liczbę $2(\cos\frac{353\pi}{4} + i \sin\frac{353\pi}{4})$;
   d) Zapisz w postaci algebraicznej liczbę $4e^{\frac{243\pi}{4}}$;
   e) Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej liczby o module równym 3, które są wierzchołkami trójkąta równobocznego o środku w początku układu współrzędnych i podstawie równoległej do osi rzeczywistej.
7. Oblicz wszystkie potęgi o wykładnikach całkowitych od -4 do 4 liczby $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ i zaznacz ich położenie na płaszczyźnie zespolonej. Wyjaśnij uzyskany wynik za pomocą przedstawienia trygonometrycznego tej liczby.
8. Podaj wzór de Moivre'a. Zastosuj ten wzór do obliczenia $(-2 - 2i)^{10}$.
9. Przedstaw w postaci trygonometrycznej i wykładniczej liczbę $z = -\sqrt{3} + i$ i oblicz $(-\sqrt{3} + i)^{24}$ dwoma sposobami.
10. Odgadnij wartości liczb i^{51} i i^{-53}. Uzasadnij otrzymany wynik.
11. Podaj definicję pierwiastka n-tego stopnia z liczby zespolonej. Korzystając z tej definicji oblicz $\sqrt{3 + 4i}$.
12. Odgadując jeden z pierwiastków stopnia 4 z liczby $(1 - 4i)^4$ wyznacz pozostałe i podaj interpretację geometryczną zbioru tych pierwiastków.
13. Podaj wzory na pierwiastki n-tego stopnia z liczby zespolonej. Wypisz związki między różnymi pierwiastkami n-tego stopnia z liczby zespolonej $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
14. Sprawdź, czy liczba $z_0 = \sqrt{3} - i$ jest pierwiastkiem wielomianu $W(z) = z^9 - 512$.
15. Ile pierwiastków ma wielomian zespolony stopnia $n \in \mathbb{N}$. Znajdź wszystkie pierwiastki wielomianu $W(z) = z^4 - 1$.
16. Ile rozwiązań ma równanie kwadratowe w zbiorze $\mathbb{C}$? Podaj odpowiednie wzory.
17. Jednym z pierwiastków wielomianu $w(z) = z^3 - z^2 - z - 15$ jest liczba $z_1 = -1 - 2i$. Znajdź pozostałe pierwiastki.

Macierze

18. Podaj definicję macierzy i wymień trzy dowolne rodzaje macierzy (podaj odpowiednie przykłady).

19. Czy każde dwie macierze można dodać, pomnożyć? Jeśli nie, jakie muszą być spełnione warunki, aby można było wykonać te działania?

20. Jaką macierz nazywamy macierzą jednostkową? Jaką własność ma ta macierz?

21. Podaj przykłady dwóch niezerowych macierzy, których iloczyn jest macierzą zerową. Czy podobna sytuacja może się zdarzyć w zbiorze liczbowym?

22. Czy w zbiorze macierzy prawdziwy jest wzór skróconego mnożenia $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$? Odpowiedź uzasadnij.

23. Napisz dowolną macierz trójkątną dolną i dowolną macierz trójkątną górną, obie czwartego stopnia. Oblicz ich iloczyn.

24. Uzupełnij wzory $(A+B)^T = ...$, $(AB)^T = ...$, $(A^T)^T = ...$ (własności transponowania macierzy). Na przykładzie macierzy $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 2 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ sprawdź drugi wzór.

25. Podaj definicję wyznacznika macierzy stopnia $n \in \mathbb{R}$.

26. Sformułuj twierdzenie Laplace'a o rozwinięciu wyznacznika. Korzystając z tego twierdzenia oblicz wyznacznik macierzy $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

27. Wymień własności wyznacznika macierzy. Korzystając z tych własności określ wartość wyznacznika $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 6 & 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$.

28. Podaj definicję macierzy nieosobliwej. Sprawdź czy macierz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \end{bmatrix}$ jest nieosobliwa.

29. Napisz dowolną macierz trójkątną górną piątego stopnia i oblicz jej wyznacznik. Ile jest równy wyznacznik dowolnej macierzy trójkątnej górnej (dolnej)?

30. Podaj definicję macierzy odwrotnej. Sprawdź, czy macierz $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ jest odwrotna do macierzy $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

31. Podaj wzór macierzy odwrotnej do macierzy A. Wymień własności macierzy odwrotnych.

32. Podaj definicję rzędu macierzy.
Sprawdź, dla jakich $a \in \mathbb{R}$ rząd macierzy $A = \begin{bmatrix} a & 4 & 2 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ jest równy 2.

33. Wymień własności rzędu macierzy i operacje elementarne, które nie zmieniają rzędu.

34. Niech $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Uzupełnij zdanie: $rz\ A = r \Longleftrightarrow$ ....

35. Jaką macierz nazywamy macierzą schodkową? Macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 12 \end{bmatrix}$ sprowadź do postaci schodkowej i określ jej rząd.

Układy równań liniowych

36. Jaki układ nazywamy układem m równań liniowych z n niewiadomymi? Zapisz ten układ w postaci macierzowej.

37. Podaj definicję układu jednorodnego i niejednorodnego. Co wiemy o rozwiązaniach układu jednorodnego?

38. Jaki układ nazywamy układem Cramera? Sformułuj twierdzenie o rozwiązaniu tego układu.

39. Sformułuj twierdzenie Kroneckera-Capellego.
Czy układ pięciu równań liniowych z sześcioma niewiadomymi może nie mieć żadnego rozwiązania? Czy taki układ może mieć dokładnie jedno rozwiązanie? Odpowiedź uzasadnij.

40. Czy układ siedmiu równań liniowych z sześcioma niewiadomymi może nie mieć żadnego rozwiązania? Czy taki układ może mieć dokładnie jedno rozwiązanie? Odpowiedź uzasadnij.

41. W każdym z poniższych zdań wybierz poprawną odpowiedź.
A) Jednorodny układ m równań liniowych z n niewiadomymi, którego macierz współczynników ma rząd r, ma dokładnie jedno rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy a) $m = n = r$, b) $m = n > r$, c) $m \geq n = r$, d) $n \geq m = r$.
B) Jednorodny układ m równań liniowych z n niewiadomymi, którego macierz współczynników ma rząd r, jest sprzeczny wtedy i tylko wtedy, gdy a) $m = n = r$, b) $m < n < r$, c) $m > n > r$, d) $n > m > r$.

42. Ile rozwiązań może mieć układ n równań liniowych z n niewiadomymi? Podaj odpowiednie warunki.

Przestrzenie wektorowe. Przekształcenia liniowe

43. Podaj definicję podprzestrzeni przestrzeni wektorowej V. Sprawdź, czy zbiór wielomianów $W = \{w \in \mathbb{R}_3[x] \ : \ w(0) \geq 0\}$ jest podprzestrzenią przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}_3[x]$.

44. Podaj przykłady podprzestrzeni wektorowych przestrzeni $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$.

45. Podaj definicję podprzestrzeni generowanej przez zbiór $A \subset V$. Niech $v_1 = (1, 0, 2)$, $v_2 = (-2, 0, 4)$. Wyznacz $\mathrm{Lin}(\{v_1\})$ i $\mathrm{Lin}(\{v_1, v_2\})$.

46. Czy przecięcie i suma podprzestrzeni V_1 i V_2 przestrzeni wektorowej V są także podprzestrzeniami. Odpowiedź uzasadnij.

47. Podaj definicję liniowej niezależności wektorów. Sprawdź, czy wektory $(1, 2), (-1, 4) \in \mathbb{R}^2$ są liniowo niezależne.

48. Sformułuj warunek konieczny i wystarczający na to, aby wektory $v_1, ..., v_n \in V$ były liniowo zależne.

49. Uzasadnij, że zbiór wektorów $v_1, ..., v_n \in V$ zawierający wektor zerowy jest liniowo zależny.

50. Podaj definicję bazy przestrzeni wektorowej. Podaj przykłady baz kanonicznych znanych przestrzeni wektorowych.

51. Sformułuj twierdzenie o równoliczności baz. Ile elementów liczy dowolna baza przestrzeni $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[x]$, $n \in \mathbb{N}$? Jakie są wymiary tych przestrzeni?

52. Co to są współrzędne wektora w bazie B? Podaj współrzędne wektora $(4, 5)$ w bazie $B = \{(1, 1), (1, 0)\}$.

53. Sformułuj i uzasadnij twierdzenie o jednoznaczności przedstawienia wektora w bazie.

54. Jaki jest warunek na to, by układ n wektorów $v_1, ..., v_n$ tworzył bazę przestrzeni wektorowej $\mathbb{R}^n$.

55. Podaj definicję przekształcenia liniowego. Sprawdź, czy $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ określone wzorem $L(x, y) = (2x + y, x - y)$ jest przekształceniem liniowym.

56. Co to jest jądro i obraz odwzorowania liniowego? Podaj związek między ich wymiarami.

57. Podaj definicje monomorfizmu, epimorfizmu oraz izomorfizmu.

58. Sformułuj warunki wystarczające na to, aby odwzorowanie liniowe było:
    (a) monomorfizmem,
    (b) epimorfizmem,
    (c) izomorfizmem.

59. Wyznacz $KerL$ i ImL dla odwzorowania z pytania 55. Czy to odwzorowanie jest izomorfizmem?

60. W przestrzeni wektorowej $V = \mathbb{R}_3[x]$ określone jest odwzorowanie $L : V \to V$ według wzoru $(L(f))(x) = f''(x) - f(x)$. Wyznacz macierz tego odwzorowania względem kanonicznej bazy przestrzeni $\mathbb{R}_3[x]$.

Elementy geometrii analitycznej

61. Podaj definicję iloczynu skalarnego i omów jego własności. Jaki jest związek między prostopadłością wektorów a iloczynem skalarnym tych wektorów?

62. Oblicz iloczyn skalarny $\vec{u} \circ \vec{v}$, jeśli $\|\vec{u}\| = 2, \|\vec{v}\| = 3, \sphericalangle(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/3$.

63. Podaj definicję iloczynu wektorowego. Jaka jest interpretacja geometryczna długości wektora $\vec{u} \times \vec{v}$?

64. Znajdź wektor jednostkowy prostopadły do dwóch danych wektorów $\vec{u} = (1, 2, 3)$ i $\vec{v} = (-1, 0, 2)$.

65. Podaj definicję iloczynu mieszanego wektorów $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$. Oblicz objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach $\vec{u} = (1, 0, 2)$, $\vec{v} = (0, 1, 3)$, $\vec{w} = (-1, 2, 1)$.