ELEKTROTECHNIKA IA. ALGEBRA

Zadania z I i II terminu.

1. Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zbiór

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : \quad |z - 1 + 2i| \leq 4 \quad \wedge \quad \frac{\pi}{2} \leq \text{Arg} z < \frac{7\pi}{4} \right\}$$

2. W zbiorze liczb zespolonych $\mathbb{C}$ rozwiąż równanie

$$2z^2 - 2(1+i)z + 2 + i = 0.$$

3. Sprawdź czy macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{9} \\ 2 & 0 & 3 & 6 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ jest macierzą nieosobliwą.

4. Rozwiąż podany układ równań metodą eliminacji Gaussa

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcrcrcr} 2x & - & 3y & + & 15z & - & 21s & - & 36t & = & 22 \\ 10x & - & 15y & + & 75z & - & 105s & - & 180t & = & 110 \\ & & & & z & + & 2s & + & 2t & = & -1 \\ & & & & 4z & + & 5s & + & 6t & = & -2 \\ & & & & 7z & + & 8s & + & 9t & = & -3 \end{array} \right. .$$

5. Dane jest odwzorowanie liniowe

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad L(x, y, z) = (x - y, x - z, y - z, 2y - 2x).$$

Wyznacz jądro i obraz tego odwzorowania oraz podaj ich wymiary. Czy odwzorowanie L jest epimorfizmem?

---

6. A) W zbiorze liczb zespolonych rozwiąż równanie $(z+2)^4 = (1-i)^8$;

B) Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zbiór

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : \quad \left| \frac{3i}{z} \right| \geq \frac{1}{2} \quad \wedge \quad \frac{3}{4}\pi \leq \text{Arg} z \leq 2\pi \right\}.$$

7. a) Podaj definicję macierzy odwrotnej do macierzy A.

b) Niech A, B będą nieosobliwymi macierzami kwadratowymi stopnia n ($n \in \mathbb{N}$). Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wszystkie odpowiedzi uzasadnij.

(1) Jeżeli macierz B jest macierzą odwrotną do macierzy A, to macierz A^T jest macierzą odwrotną do macierzy B^T;
(2) Macierz kwadratowa A jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy macierz A^3 jest odwracalna.
(3) Jeżeli macierz A jest macierzą kwadratową, to $detA \cdot detA^{-1} = 1$.

8. Dane są macierze $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.
Wyznacz macierz odwrotną do macierzy A, a następnie macierz X spełniającą równanie $A^2X = 2B^T$.

9. a) Sformułuj twierdzenie Kroneckera - Capellego. Na jego podstawie określ ilość rozwiązań poniższego układu równań.

   b) Jeżeli układ ma rozwiązanie, wyznacz je.

$$\begin{cases} 2x + y + 2z + 3t + u = 2 \\ x + y + z + t + w + u = 0 \\ x + z + t + w = 1 \\ x + z + 2t - w = 2 \end{cases}$$

10. Dla odwzorowania liniowego

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ L(x, y, z) = (-z, x + 4y, 2x + 8y)$$

   wyznacz jądro i obraz oraz podaj ich wymiary. Czy odwzorowanie L jest monomorfizmem.

11. Podaj definicję iloczynu wektorowego. Oblicz pole równoległoboku rozpiętego na wektorach $\vec{u} = (-1, -2, 3)$ i $\vec{v} = (1, 0, 2)$.

---

12. A) W zbiorze liczb zespolonych $\mathbb{C}$ rozwiąż równanie $z^2 + 6(1 + i)^2 = 5$.

    B) Wyznacz moduł i argument główny liczby $z_0 = \frac{(1-i)^{28}}{(\sqrt{3}+i)^{15}}$.

13. Dane są macierze $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 3 \end{bmatrix}$.

    Wyznacz macierz odwrotną do macierzy A, a następnie macierz X spełniającą równanie $A(X + B) = I$, gdzie I oznacza macierz jednostkową.

14. Dla odwzorowania liniowego

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad L(x, y, z) = (x - y + z, 2x - 2y + 2z, -x + y, y - x)$$

    wyznacz jądro i obraz odwzorowania oraz ich bazy i wymiary.

15. Rozwiąż podany układ równań metodą eliminacji Gaussa

$$\begin{cases} x - 2y + 3s + t = 1 \\ 2x - 3y + z + 8s + 2t = 3 \\ x - 2y + z + 3s - t = 1 \\ y + 3s + 5t = 0 \\ x - 2y + 5s + 8t = -1 \end{cases}.$$

16. a) Jaką macierz nazywamy macierzą nieosobliwą?

    b) Niech A, B będą macierzami kwadratowymi stopnia n. Oceń prawdziwość poniższych zdań. Wszystkie odpowiedzi uzasadnij.
    (a) Zachodzi równość $(A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$;
    (b) Zachodzi równość $\det(BA) = \det(AB)$;
    (c) Jeżeli A, B są odwracalne, to $A + B$ jest odwracalna.

17. *(3pkt.)* Sprawdź, czy wektory $(1, 0, 2)$, $(1, -1, 6)$ oraz $(0, -1, 4)$ generują przestrzeń $\mathbb{R}^3$.

18. Podaj definicję iloczynu mieszanego wektorów w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Wyznacz objętość czworościanu o wierzchołkach $P_1 = (1, 1, 1)$, $P_2 = (-1, 0, 1)$, $P_3 = (5, 6, 7)$, $P_4 = (2, 3, 1)$.