Rozdział 13

Zadania egzaminacyjne

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 1 – 03.02.2011*

Zadanie 1. Wyznacz sumę rozwiązań równania:

$$(8z + 1 - i)^2 - 2^7 i z^4 = 0.$$

Zadanie 2. Niech $u_0 = (1, 2, 1)$. Rozważmy odwzorowanie

$$f : \mathbb{R}^3 \ni v \to u_0 \times v \in \mathbb{R}^3,$$

gdzie $\times$ oznacza iloczyn wektorowy.
a) Uzasadnij, że f jest endomorfizmem.
b) Wyznacz jądro oraz obraz endomorfizmu f.

Zadanie 3. Rozważmy dwie macierze:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Sprawdź, czy macierze A i B są podobne.
b) Wyznacz macierz $I + A^2 + A^4 \ldots + A^{100}$.

Zadanie 4. Rozważmy podprzestrzeń liniową

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x + y - z = 0,\ x - 2y + z = 0\right\}$$

przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Wyznacz rzut ortogonalny wektora $u = (1, -1, 1)$ na podprzestrzeń V. W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ przyjmij naturalny iloczyn skalarny.

Zadanie 5. Wyznacz wszystkie wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których macierz

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -a \\ -1 & -a & 4 \end{pmatrix}$$

ma tylko nieujemne wartości własne.

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 2 – 10.02.2011*

Zadanie 1. Na płaszczyźnie zespolonej zaznacz zbiór:

$$\left\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{6} \leqslant \arg \frac{i}{(z+iz)^2} < \frac{\pi}{4}\right\}.$$

Zadanie 2. W zbiorze $Z = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ wprowadzamy działanie $*$ określone wzorem $a * b = a + b - ab$. Sprawdź, czy struktura $(Z, *)$ jest grupą.

Zadanie 3. Wyznacz macierz Jordana endomorfizmu $F : \pi_2 \ni f \to f + f' \in \pi_2$.

Zadanie 4. Wyznacz wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których układ równań

$$\begin{cases} x + y = -a(1+y) \\ 2x + y = ax - 2 \\ 2x + ay = 1 - a \end{cases}$$

posiada niezerowe rozwiązanie.

Zadanie 5. Wyznacz rzut ortogonalny macierzy

$$u^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

na podprzestrzeń

$$V = \left\{\begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & d \end{bmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}\right\}$$

przestrzeni $\mathbb{R}^{2\times 3}$. Przyjmij iloczyn skalarny $[a_{ij}] \circ [b_{ij}] = \sum\limits_{i=1}^{2}\sum\limits_{j=1}^{3} a_{ij}b_{ij}$.

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 3 – 24.02.2011*

Zadanie 1. Dnia 10 lutego 2011 roku studenci pierwszego roku jednej z krakowskich uczelni zdawali pisemny egzamin z algebry liniowej. Każdy ze studentów uzyskał inną liczbę punktów. W grupie zdających wprowadzono dwa działania: r_1, które z dwóch osób wybiera tę, która uzyskałałepszy wynik z egzaminu oraz r_2, które z dwóch osób wybiera osobę młodszą (decyduje numer PESEL).

a) Sprawdź, czy struktura algebraiczna złożona z powyższej grupy studentów oraz działania r_1 jest grupą?

b) Sprawdź rozdzielność działania r_1 względem działania r_2.

Zadanie 2. Prosta $y = ax + b$ przecina wykres funkcji $y = 2x^5 - x^3 + 4x^2 + 3x - 7$ w pięciu różnych punktach $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4), (x_5, y_5)$. Pokaż, że liczba $\frac{x_1+x_2+x_3+x_4+x_5}{5}$ nie zależy od parametrów a i b.

Zadanie 3. Niech $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ będzie macierzą, taką że

$$A + A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Czy macierz $A^3 + \left(A^{-1}\right)^3$ jest diagonalizowalna? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 4. Zbadaj, w zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, wymiar obrazu endomorfizmu $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ określonego wzorem

$$f(x, y, z) = \left(-2x + (-1-a)y + z, ax - az, -x + \left(a + a^2\right)y + z\right).$$

Zadanie 5. Wyznacz rzut ortogonalny wektora $u = (1, 2, 3)$ na podprzestrzeń liniową $x + y + z = 0$ przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Przyjmij naturalny iloczyn skalarny.

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 1 – 03.02.2012*

Zadanie 1. Liczby $a, b, c \in \mathbb{C}$ to pierwiastki wielomianu $f(x) = 3x^3 - 14x^2 + x + 62$. Oblicz

$$\frac{1}{a+3} + \frac{1}{b+3} + \frac{1}{c+3}.$$

Zadanie 2. Niech $\mathbb{R}_*^{n\times m}$ oznacza zbiór macierzy wymiaru $n \times m$ o elementach należących do zbioru $\mathbb{R}_* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$. W zbiorze $\mathbb{R}_*^{n\times m}$ wprowadzamy działanie $\circ$ określone wzorem:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nm} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{1m}b_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b_{n1} & \cdots & a_{nm}b_{nm} \end{bmatrix}.$$

Czy struktura $(\mathbb{R}_*^{n\times m}, \circ)$ jest grupą abelową? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 3. Spośród rozwiązań równania

$$\left(z^3 - 27i\right)\left(z^2 - (3+i)z + 2 + 2i\right) = 0$$

wybierz te, które należą do zbioru $\left\{z \in \mathbb{C} : 0 \leqslant \operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{2}\right\}$.

Zadanie 4. Rozważmy odwzorowanie liniowe $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ postaci

$$L(x, y, z) = (x + z, 3x + 2z, z).$$

Czy istnieje baza przestrzeni $\mathbb{R}^3$, w której macierz A_L odwzorowania L jest diagonalna? Odpowiedź uzasadnij; w przypadku pozytywnej odpowiedzi wyznacz tę bazę.

Zadanie 5. W przestrzeni $\mathbb{R}^{3\times 3}$ iloczyn skalarny s określono wzorem:

$$s\left([a_{ij}], [b_{ij}]\right) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}b_{ij}.$$

Wyznacz rzut ortogonalny wektora

$$u = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

na podprzestrzeń $V = \left\{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} : A = A^T\right\}$.

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 2 – 09.02.2012*

Zadanie 1. Niech

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & -2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

W zbiorze $V = \left\{v \in \mathbb{R}^3 : (A - 6I)v = 0\right\}$ wprowadzamy działanie $\otimes$ określone wzorem

$$v_1 \otimes v_2 = (u_0 \times v_1) - (v_2 \times u_0),$$

gdzie $\times$ to iloczyn wektorowy. Sprawdź czy: a) działanie $\otimes$ jest wewnętrzne w zbiorze V; b) działanie $\otimes$ jest przemienne; c) działanie $\otimes$ posiada element neutralny. Czy struktura algebraiczna $(V, \otimes)$ jest grupą?

Zadanie 2. Rozwiąż równanie

$$\left(\sqrt[4]{32}\left(\sin\frac{\pi}{8}+i\cos\frac{\pi}{8}\right)z+1+i\right)^2+z^4=0$$

ze względu na niewiadomą $z\in\mathbb{C}$.

Zadanie 3. Znajdź rozwiązania poniższego układu równań

$$\begin{cases} 2x+y-z+t=1 \\ y+3z-3t=1 \\ x+y+z-t=1 \end{cases}.$$

Zadanie 4. Wyznacz wszystkie wartości parametru $a\in\mathbb{R}$, dla których macierz

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1-a^2 \\ 1 & 0 & 1+a^2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

jest diagonalizowalna.

Zadanie 5. Na rzeczywistej przestrzeni liniowej V:

$$V=\operatorname{span}\{\sin x,\cos x,x\sin x,x\cos x\}$$

określono odwzorowanie liniowe $\mathcal{L}:f\to f+f'$. Wyznacz $\ker\mathcal{L}$, $\operatorname{Im}\mathcal{L}$ oraz sprawdź, czy jest to endomorfizm na V; w przypadku pozytywnej odpowiedzi wyznacz również jego rzeczywiste wartości własne.

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 3 – 24.02.2012*

Zadanie 1. Sprawdź, czy zbiór $G=\left\{\left(t,2^t\right):t\in\mathbb{R}\right\}$ wraz z działaniem

$$h\left(\left(x_1,y_1\right),\left(x_2,y_2\right)\right)=\left(x_1+x_2+2,4y_1y_2\right)$$

tworzy grupę. Czy jest to grupa abelowa?

Zadanie 2. Rozwiąż równanie $z^6-2z^3+2=0$ ze względu na niewiadomą $z\in\mathbb{C}$.

Zadanie 3. Spośród wielomianów $v_1(x)=x^3+2x^2+x-1$, $v_2(x)=2x^3+4x^2-x-2$, $v_3(x)=x$, $v_4(x)=x^3+2x^2+x+1$ wyznacz te, które są liniowo niezależne; następnie uzupełnij je do bazy przestrzeni wielomianów stopnia co najwyżej cztery.

Zadanie 4. Czy macierze

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

są podobne? Odpowiedź uzasadnij; w przypadku pozytywnej odpowiedzi wyznacz macierz ustalającą to podobieństwo.

Zadanie 5. Wyznacz długość wektora $\overrightarrow{AB}$, gdzie A to punkt w którym prosta $l:\frac{x-1}{2}=y+1=\frac{z-6}{3}$ przecina płaszczyznę $\pi:4(x+1)+2y+6z=0$, a B to rzut ortogonalny, w sensie naturalnego iloczynu skalarnego przestrzeni $\mathbb{R}^3$, wektora $u=(1,-1,6)$ na płaszczyznę $2x+y+3z=0$.

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 1 – 01.02.2013*

Zadanie 1. Wyznacz sumę oraz iloczyn wszystkich elementów zbioru $\sqrt[2013]{1+i}$.

Zadanie 2. Dla jakich wartości parametru $p \in \mathbb{R}$ układ równań

$$\begin{cases} x + p^2 y + z &= -p \\ x + y - pz &= p^2 \\ y + z &= 1 \end{cases}$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie? Zbadaj liczbę jego rozwiązań w pozostałych przypadkach.

Zadanie 3. Wyznacz wszystkie wartości parametru $a \in \mathbb{R}$ dla których funkcja

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \ni (x_1, x_2, x_3) \to \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 1 & 2a & -4 \\ -2 & a-1 & 0 \\ 2a & 0 & 2-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}$$

przyjmuje jedynie wartości nieujemne.

Zadanie 4. Wyznacz rzut ortogonalny wektora $u = (1,0,0)$ na podprzestrzeń liniową

$$V = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 6y - z = 0, -x + 2y + z = 0, 3x + 2y - 3z = 0 \right\}.$$

W przestrzeni V przyjmujemy naturalny iloczyn skalarny przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 5. Niech $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Uzasadnij, że jeżeli dla pewnej liczby naturalnej n zachodzi $A^n = \mathbf{0}_{2\times 2}$, to $A^2 = \mathbf{0}_{2\times 2}$.

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 2 – 08.02.2013*

Zadanie 1. Uzasadnij, że punkty $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3)$ stanowią wierzchołki trójkąta równobocznego o środku w punkcie $(0,0)$ wtedy i tylko wtedy, gdy ich współrzędne spełniają następujące warunki:

$$\begin{matrix} a_1 + a_2 + a_3 = 0 & \quad a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 - b_1b_2 - b_1b_3 - b_2b_3 = 0 \\ b_1 + b_2 + b_3 = 0 & \quad a_1b_2 + a_2b_1 + a_1b_3 + a_3b_1 + a_2b_3 + a_3b_2 = 0 \end{matrix}.$$

Zadanie 2. Rozwiąż równanie $(z+a)^3 = i$ ze względu na niewiadomą $z \in \mathbb{C}$; następnie zaznacz na płaszczyźnie zespolonej te wartości parametru $a \in \mathbb{C}$, dla których rozwiązania te należą do zbioru $\left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg} z < \pi \right\}$.

Zadanie 3. Oblicz odległość punktu przecięcie się prostych

$$l_1 : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 4 - 3t \end{cases} \qquad l_2 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + t, \\ z = 3 - t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

od podprzestrzeni liniowej $V \subset \mathbb{R}^3$ rozpiętej przez wektory $u_1 = (1,0,1)$, $u_2 = (2,1,0)$.

Zadanie 4. Rozważmy endomorfizm $F : \pi_2 \ni f \to f(0) + f(1)x + f(-1)x^2 \in \pi_2$, gdzie π_2 to rzeczywista (tj. nad ciałem $\mathbb{R}$) przestrzeń wielomianów rzeczywistych stopnia nie większego niż dwa z naturalnymi działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianu przez skalar. Sprawdź, czy endomorfizm F jest diagonalizowalny; w przypadku pozytywnej odpowiedzi wyznacz dla niego bazę Jordana przestrzeni π_2.

Zadanie 5. Rozważmy bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$ $v_1 = (1,0,2), v_2 = (-1,1,0), v_3 = (1,1,1)$ ortonormalną względem iloczynu skalarnego s. Wyznacz kąt, względem tego iloczynu skalarnego, pomiędzy wektorami $u = (1,2,3)$ oraz $w = (1,1,4)$.

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 3 – 19.02.2013*

Zadanie 1. Niech $\mathcal{T}_3$ oznacza zbiór macierzy trójkątnych górnych wymiaru 3×3 z jedynkami na przekątnej. Sprawdź, czy struktura algebraiczna $(\mathcal{T}_3, \cdot)$ jest grupą; działanie $\cdot$ to iloczyn macierzy.

Zadanie 2. Sprawdź, czy macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 6 \\ -1 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

jest diagonalizowalna.

Zadanie 3. Wyznacz wektory własne endomorfizmu

$$F : \pi_2 \ni f(x) \to -f(x) + f'(x) - f''(x) + f(0) \in \pi_2,$$

gdzie π_2 to rzeczywista przestrzeń wielomianów stopnia nie większego niż dwa z naturalnymi działaniami dodawania wielomianów i mnożenia wielomianu przez skalar.

Zadanie 4. Wielomian charakterystyczny macierzy A ma postać $\varphi_A(\lambda) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + \lambda + 2$. Oblicz wyznacznik macierzy $A^3 + A^2 - A - I$.

Zadanie 5. Spośród wektorów

$$v_1 = (1, 3, 1, -1), v_2 = (2, 4, 0, -6), v_3 = (0, 2, 2, 4), v_4 = (0, 1, -1, -5)$$

wybierz bazę rzeczywistej przestrzeni wektorowej

$$V = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : x + y - 3z + w = 0, 2x - y + z = 0\right\};$$

następnie uzupełnij ją do bazy przestrzeni

$$W = \left\{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : 3x - 2z + w = 0\right\}.$$

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 1 – 04.02.2014*

Zadanie 1. W zbiorze $K = (0, +\infty)$ wprowadzamy działania:

$$a \oplus b = ab, \qquad a \odot b = a^{\ln b}.$$

Sprawdź, czy struktura algebraiczna $(K, \oplus, \odot)$ jest ciałem.

Zadanie 2. Rozwiąż równanie ze względu na niewiadomą $z \in \mathbb{C}$:

$$z^4 - z^3 + (1 - i) z + i - 1 = 0.$$

Zadanie 3. Rozważmy odwzorowanie liniowe

$$f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to (-x + 3z, -3x - 4y - 3z, 9x + 5z) \in \mathbb{R}^3.$$

Sprawdź, czy istnieje baza przestrzeni $\mathbb{R}^3$ złożona z wektorów własnych endomorfizmu f; w przypadku pozytywnej odpowiedzi, wyznacz jego macierz w tej bazie.

Zadanie 4. Czy odwzorowanie $f : \pi_3 \to \pi_2$ określone wzorem

$$f(\varphi)(t) = (t + 1)\varphi''(t - 1) + \varphi'(t + 1)$$

jest liniowe? Jeżeli tak, wyznacz jego jądro oraz obraz.

Zadanie 5. Wyznacz rzut ortogonalny (w sensie naturalnego iloczynu skalarnego przestrzeni $\mathbb{R}^3$) wektora $u = (2, 1, 2)$ na podprzestrzeń liniową

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : -x + 8y - \sqrt{2}z = 0, 2\sqrt{2}y - z = 0\right\}.$$

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 2 – 11.02.2014*

Zadanie 1. Przedstaw graficznie zbiór tych parametrów $a \in \mathbb{C}$ dla których wszystkie rozwiązania równania

$$z^2 + 2(a + i)z + a^2 + 2ai - 1 - i = 0$$

należą do zbioru $\left\{z \in \mathbb{C} : -\pi < \operatorname{Arg} z < -\frac{\pi}{2}\right\}$.

Zadanie 2. Wyznacz bazę Jordana przestrzeni π_2 dla endomorfizmu $F : \pi_2 \to \pi_2$ określonego wzorem

$$F : at^2 + bt + c \to (4a + 4b)t^2 + (2b - 2c + a)t + a + 2b + 2c.$$

Zadanie 3. Suma wyrazów w każdym wierszu macierzy $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ jest równa s. Uzasadnij, że s jest wartością własną macierzy A oraz wyznacz odpowiadający tej wartości własnej wektor własny.

Zadanie 4. Rozważmy dwie bazy przestrzeni π_n:

$$e : \left\{e_0 = 1, e_1 = 1 + x, e_2 = x + x^2, e_3 = x^2 + x^3, \ldots, e_n = x^{n-1} + x^n\right\}$$

oraz

$$\widetilde{e} : \left\{\widetilde{e}_0 = x^n, \widetilde{e}_1 = x^n + 1, \widetilde{e}_2 = x^n + x, \widetilde{e}_3 = x^n + x^2, \ldots, \widetilde{e}_n = x^n + x^{n-1}\right\}.$$

Wyznacz macierz P^{-1}, gdzie P oznacza macierz przejścia od bazy e do bazy $\widetilde{e}$.

Zadanie 5. Wyznacz odległość prostej l od płaszczyzny π, jeżeli

$$l : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}, \qquad \pi : \begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = -2 + t - 2s \\ z = 3 + 2t - s \end{cases}, \ t, s \in \mathbb{R}.$$

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 3 – 18.02.2014*

Zadanie 1. Wyznacz liczbę tych elementów zbioru $\sqrt[2016]{2014i}$, które należą również do zbioru

$$\left\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{4} < \operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{3}\right\}.$$

Zadanie 2. Sprawdź, czy macierz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 4 \\ -2 & 1 & -2 \\ -4 & 4 & -5 \end{pmatrix}$$

jest diagonalizowalna; następnie wyznacz macierz A^{2014}.

Zadanie 3. Wyznacz te wartości parametru $\alpha \in \mathbb{R}$, dla których macierz

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1-\alpha & -2 \\ 1-\alpha & 1 & \alpha \\ -2 & \alpha & 4 \end{pmatrix}$$

ma jedynie nieujemne wartości własne.

Zadanie 4. Wyznacz bazę jądra oraz bazę obrazu odwzorowania liniowego

$$F : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to (x + y - z, 2y - 2z, x - y + z, 3x) \in \mathbb{R}^4.$$

Zadanie 5. W przestrzeni π_2 iloczyn skalarny $\circ$ określono wzorem

$$\left(a_1t^2 + b_1t + c_1\right) \circ \left(a_2t^2 + b_2t + c_2\right) := a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2.$$

Wyznacz rzut ortogonalny wielomianu $u(t) = (t - 1)^2$ na podprzestrzeń

$$V = \{f \in \pi_2 : f\text{–funkcja parzysta}\}.$$

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 1 – 03.02.2015*

Zadanie 1. Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej poniższe zbiory:

a) $A = \left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\left(z^4\right) - |z|^2 \operatorname{Im}\left(z^2\right) \leqslant 0\right\}$

b) $B = \left\{z \in \mathbb{C} : -\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{Arg}\left[(z - iz)^2\right] \leqslant 0\right\}$.

Zadanie 2. Niech A będzie macierzą kwadratową o elementach rzeczywistych.

a) Oblicz $\det(2A)$ wiedząc, że $\det(3A) = 54$ oraz $\det(4A) = 128$.

b) Jakie wartości może przyjąć wyznacznik macierza A, jeżeli

$$A^T\left(AA^T\right)^{-1}\left(AA^T\right)^T - \left(\det A^2\right)\left[(\det A)\, A\right]^T = 0.$$

Zadanie 3. Wyznacz te wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których podany układ równań ma niezerowe rozwiązanie:

$$\begin{cases} a^2x + y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ \quad 3x + 4z = a \end{cases}.$$

Zadanie 4. Wyznacz, o ile istnieją, te wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$ dla których macierze

$$A = \begin{pmatrix} 3 & a-1 & b \\ -6 & 3 & -5 \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & b-2 & 0 \\ -1 & a & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

są podobne.

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 2 – 10.02.2015*

Zadanie 1. Liczba $s_0 = 1 + i\sqrt{2}$ jest jednym z rozwiązań równania

$$s^6 - 2s^5 + 5s^4 - 4s^3 + 8s^2 - 4s + 6 = 0.$$

Wyznacz pozostałe rozwiązania tego równania oraz wybierz spośród nich te, które należą do zbioru $\left\{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg} z \leq \pi\right\}$.

Zadanie 2. Wyznacz rzut ortogonalny, w sensie naturalnego iloczynu skalarnego przestrzeni $\mathbb{R}^3$, wektora $(1, 1, 1)$ na jądro odwzorowania liniowego

$$F : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to (y - 2x + z, y - z, x - 2y + z) \in \mathbb{R}^3.$$

Zadanie 3. Zbadaj liczbę rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x - ay + z = 1 \\ -2x - y - z = 1 \\ 2x - y = 2 \\ -x - ay - 2z = 2 \end{cases}$$

w zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4. Niech $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ będzie macierzą postaci

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Sprawdź, czy macierz A jest diagonalizowalna.
(b) Wyznacz A^{2015}.

Egzamin z algebry liniowej – AiR — *termin 3 – 26.02.2015*

Zadanie 1.
(a) Rozwiąż równanie w zbiorze liczb zespolonych: $z^3 = -8\overline{z}$.
(b) Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej liczby zespolone z spełniające warunek $\left|z^2 + 4\right| > |z - 2i|$.

Zadanie 2. Wyznacz macierz X spełniającą równanie

$$A + B^T (X^T)^{-1} A = \left[A^T \left((A^{-1} + B)^{-1} + I\right)\right]^T.$$

Zadanie 3. Rozważmy cztery punkty $A(0,1,0)$, $B(-1,2,1)$, $C(1,0,1)$, $D(1,-1,1)$. Wyznacz odległość pomiędzy prostymi l_{AB} oraz l_{CD} przechodzącymi odpowiednio przez punkty A, B oraz C, D.

Zadanie 4. Wyznacz te wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których macierz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1-a & 1 \\ 1-a & a & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ma jedynie nieujemne wartości własne.

Egzamin z algebry liniowej – AiR — *termin 1 – 29.01.2016*

Zadanie 1. Niech $z_0, z_1, \ldots, z_4$ będą pierwiastkami algebraicznymi stopnia 5 z 32. Oblicz

$$\sum_{k=0}^{4} |2i - z_k|^2.$$

Zadanie 2. Wielomian $\varphi_A(x) = -x^3 + 4x^2 + 2x - 1$ jest wielomianem charakterystycznym macierzy A. Wyznacz wielomiany charakterystyczne macierzy: a) $2A - I$, b) $(A + 2I)^T$, c) A^{-1}.

Zadanie 3. Niech

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & 5 & 2 \\ b & -1 & 4 \end{pmatrix}, \; v_1 = (1,1,-1)^T.$$

Wyznacz te wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$, dla których wektor v_1 jest wektorem własnym macierzy A. Następnie sprawdź, czy otrzymana macierz jest diagonalizowalna.

Zadanie 4. Rozważmy przestrzeń $\mathbb{R}^2$ z iloczynem skalarnym $\circ$ określonym wzorem

$$x \circ y = x^T \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} y.$$

Wyznacz rzut ortogonalny (w sensie iloczynu skalarnego $\circ$) wektora $u = (1,3)^T$ na podprzestrzeń liniową rozpiętą przez wektor $e = (1,1)^T$.

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 2 – 05.02.2016*

Zadanie 1. Wiedząc, że z jest liczbą zespoloną o argumencie głównym $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ oraz o module $|z| > 1$, znajdź argument główny liczby zespolonej $\frac{\overline{(-iz)}z^3}{1-|z|^2}$.

Zadanie 2. Wektory $y, v_2, v_3, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ tworzą bazą przestrzeni $\mathbb{R}^n$, ortogonalną w sensie naturalnego iloczyny skalarnego $\circ$ przestrzeni $\mathbb{R}^n$ (tj. $v \circ w = v^T w$). Niech $x \in \mathbb{R}^n$ będzie dowolnym niezerowym wektorem.

(a) Pokaż, że wektory $x, v_2, v_3, \ldots, v_n$ są wektorami własnymi macierzy xy^T oraz wyznacz odpowiadające im wartości własne.

(b) Wykaż, że $\det\left(I_n - xy^T\right) = 1 - y^T x$.

Zadanie 3. Wyznacz liczbę rozwiązań układu równań

$$\begin{cases} x + 2y - z + 2w = 1 \\ 2x + 4y + z - 2w = 2 \\ -x - 2y - 2z + 4w = 1 \end{cases}.$$

Zadanie 4. Zbadaj określoność formy kwadratowej $\varphi(x,y,z) = 2x^2 - 2xz + 2y^2 - 2yz + z^2$.

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 3 – 17.02.2016*

Zadanie 1. Czy zbiór liczb niewymiernych z dołączoną liczbą 1, z naturalnym działaniem mnożenia liczb tworzy grupę? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 2. Rozważmy odwzorowanie liniowe

$$F : \pi_3 \ni ax^3 + bx^2 + cx + d \to (a+b-c)\,x^2 + (2b+d)\,x + 2c - b \in \pi_2.$$

Wyznacz rzut ortogonalny wielomianu $u(x) = x^2 + 2x + 2$ na podprzestrzeń $\operatorname{Im} F$ (tj. na obraz odwzorowania F) przestrzeni π_2 wyposażonej w iloczyn skalarny $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\,g(x)\,dx$.

Zadanie 3. Wyznacz sumę wszystkich liczb zespolonych z spełniających równanie

$$z^3 = \left(-2 + 2\sqrt{3}i\right)\overline{z}.$$

Zadanie 4. Wykorzystując postać Jordana macierzy $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3i & 1 \end{pmatrix}$ wyznacz cztery różne macierze B spełniające równanie $B^2 = A$.

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 1 – 31.01.2017*

Zadanie 1. Czy zbiór $G = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : |\det A| = 1\}$ z działaniem mnożenia macierzy tworzy grupę? Czy jest to grupa abelowa? Odpowiedzi pozytywne uzasadnij, negatywną poprzyj stosownym przykładem.

Zadanie 2. Czy każda macierz $A \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ spełniająca równanie $(A-I)^2\,(A+2I) = 0$ jest diagonalizowalna? Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 3. Wyznacz te wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których obraz $\operatorname{Im} f$ odwzorowania liniowego

$$f : \mathbb{R}^4 \ni (x, y, z, w) \to (x + ay - z, 2x - 2y + aw, x - y - w) \in \mathbb{R}^3$$

tworzy płaszczyznę w $\mathbb{R}^3$.

Zadanie 4. W przestrzeni $\mathbb{R}^{2\times 2}$ iloczyn skalarny zdefiniowano wzorem $A \circ B = \operatorname{tr}\left(A^T B\right)$, gdzie $\operatorname{tr}(\cdot)$ oznacza ślad macierzy. Wyznacz rzut ortogalny macierzy I_2 (tj. macierzy jednostkowej wymiaru 2×2) na podprzestrzeń liniową rozpiętą przez macierze

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 2 – 07.02.2017*

Zadanie 1. Wykorzystując wzory Viète'a, znajdź wszystkie rozwiązania układu równań

$$\begin{cases} x + y + z = -1 - i \\ xy + xz + yz = 2 + i \\ xyz = -2 \end{cases}, \quad \text{w którym } x, y, z \in \mathbb{C}.$$

Zadanie 2. Wyznacz macierz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ o wartościach własnych $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ oraz $\lambda_3 = 0$, którym odpowiadają wektory własne

$$v_{\lambda_1} = (1, 1, 1)^T, \quad v_{\lambda_2} = (1, 0, 1)^T, \quad v_{\lambda_3} = (1, -1, 0)^T.$$

W rozwiązaniu wykorzystaj postać Jordana poszukiwanej macierzy.

Zadanie 3. Wyznacz te wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których nierówność

$$x^T \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix} x \geqslant y^T \begin{pmatrix} a & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix} y$$

jest prawdziwa dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}^2$.

Zadanie 4. Niech $v, w \in \mathbb{R}^3$ będą wektorami spełniającymi warunek $v \circ v = w \circ w = 1$, $v \circ w = \frac{1}{2}$, gdzie $\circ$ oznacza naturalny iloczyn skalarny w $\mathbb{R}^3$. Wyznacz ortonormalną bazę podprzestrzeni liniowej rozpiętej przez wektory v oraz w.

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 3 – 15.02.2017*

Zadanie 1. Znajdź wszystkie liczby naturalne n, dla których dokładnie dwa rozwiązania równania $z^n = 1 + i\sqrt{3}$ należą do zbioru $\left\{z \in \mathbb{C} : 0 \leqslant \operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{2}\right\}$. Wyznacz te rozwiązania.

Zadanie 2. Punkt $x_0 \in X$ nazywamy punktem stałym odwzorowania $f : X \to X$, jeżeli $f(x_0) = x_0$. Wyznacz wszystkie punkty stałe odwzorowania

$$f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to (2y + z, x + y - 3z, -x + 3y + z) \in \mathbb{R}^3.$$

Zadanie 3. Wyznacz te wartości parametru $a \geqslant 0$, dla których macierz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a & 1 + a \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & a & 4 \end{pmatrix}$$

jest diagonalizowalna.

Zadanie 4. Niech $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Oblicz:
(a) $\det(A+B)$ wiedząc, że $\det B^T A = 2$ oraz $\det\left(B^{-1}+A^{-1}\right) = -3$;
(b) $\det\left(A^T B^{-1} - I\right)$ wiedząc, że $\det\left(B^T - A\right) = 5$, $\det(-B) = -\det B \neq 0$ oraz $B^4 = B$.

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 1 – 29.01.2018*

Zadanie 1. Liczby $a, b, c \in \mathbb{C}$ to pierwiastki wielomianu $f(x) = x^3 - (1-i)x^2 - x - i$. Wyznacz $\mathfrak{Re}(w)$, gdzie

$$w = \left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}\right)^{2018}.$$

Zadanie 2. Wiadomo, na podstawie twierdzenia Cayleya–Hamiltona, że wielomian charakterystyczny macierzy kwadratowej jest jej wielomianem zerującym. Wykorzystując ten fakt uzasadnij, że dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ oraz dla dowolnej liczby naturalnej n istnieją liczby $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$, dla których $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_2$.

Zadanie 3. Sprawdź, czy istnieje baza przestrzeni π_2 (tj. wielomianów rzeczywistych stopnia nie większego niż 2), w której macierzą endomorfizmu

$$F : \pi_2 \ni ax^2 + bx + c \to (2a-b)x^2 + 2bx + 2c + b \in \pi_2$$

jest macierz

$$A_F = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Odpowiedź uzasadnij.

Zadanie 4. Zbadaj liczbę rozwiązań układu równań

$$\begin{pmatrix} 2 & a-1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}$$

w zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$.

Egzamin z algebry liniowej – AiR *termin 2 – 05.02.2018*

Zadanie 1. Liczby z_1, z_2, z_3, z_4 to pierwiastki algebraiczne czwartego stopnia z liczby $z = 20 + 18i$. Wyznacz

$$w = (1-z_1)^2 + (1-z_2)^2 + (1-z_3)^2 + (1-z_4)^2.$$

Zadanie 2. Niech $a \neq b$ będą dowolnymi elementami. W zbiorze $\mathcal{F} = \{f_1, f_2\}$, gdzie f_1, f_2 to funkcje prowadzące z $\{a, b\}$ w $\{a, b\}$ postaci

$$f_1(x) = \begin{cases} a, & \text{dla } x = a \\ b, & \text{dla } x = b \end{cases}, \qquad f_2(x) = \begin{cases} b, & \text{dla } x = a \\ a, & \text{dla } x = b \end{cases},$$

wprowadzamy działanie $\circ$ składania odwzorowań, tj. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Sprawdź, czy struktura algebraiczna $(\mathcal{F}, \circ)$ jest grupą abelową.

Zadanie 3. Wyznacz bazę Jordana przestrzeni π_1 (tj. wielomianów rzeczywistych stopnia nie większego niż jeden) dla endomorfizmu

$$F : \pi_1 \ni ax + b \to (3a-b)x + a + b \in \pi_1.$$

Sprawdź poprawność wyniku poprzez wyznaczenie macierzy reprezentującej endomorfizm F w uzyskanej bazie.

Zadanie 4. Wyznacz rzut ortogonalny (w sensie naturalnego iloczynu skalarnego przestrzeni $\mathbb{R}^3$) elementu $u = (6, 2, -4)^T$ na podprzestrzeń liniową rozpiętą przez wektory

$$v_1 = (2, 0, -1)^T, \quad v_2 = (1, -5, 2)^T.$$

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *termin 3 – 12.02.2018*

Zadanie 1. Niech $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Podane liczby zespolone zapisz w postaci trygonometrycznej:

$$z_1 = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n, \qquad z_2 = (\cos\alpha - i\sin\alpha)^n,$$
$$z_3 = (\sin\alpha + i\cos\alpha)^n, \qquad z_4 = (\sin\alpha - i\cos\alpha)^n.$$

Zadanie 2. Sprawdź, czy podane macierze są podobne

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

w przypadku pozytywnej odpowiedzi wyznacz macierz P dla której $A = PBP^{-1}$.

Zadanie 3. Wyznacz wszystkie miejsca zerowe wielomianu $\varphi(x) = x^6 + 1$; następnie przedstaw go jako iloczyn wielomianów rzeczywistych stopnia co najwyżej drugiego.

Zadanie 4. Niech $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ będzie macierzą postaci

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2a+1 & 3a \\ -1 & a & a+1 \end{pmatrix}.$$

Wyznacz zbiór tych parametrów $a \in \mathbb{R}$, dla których funkcja $\varphi : \mathbb{R}^3 \ni x \to x^T A x \in \mathbb{R}$ przyjmuje jedynie wartości nieujemne.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *Termin 1. – 31.01.2019*

Zadanie 1. Liczby s_1, s_2, s_3, s_4 to pierwiastki wielomianu

$$f(s) = -s^4 + (1+i)s^3 + is + 1.$$

Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zbiór liczb $\lambda \in \mathbb{C}$ spełniających warunek

$$\textstyle\sum_{k=1}^4 |\lambda + s_k|^2 < \sum_{k=1}^4 \left|\overline{\lambda} + s_k\right|^2.$$

Zadanie 2. Wyznacz te wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których zbiór

$$\left\{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det A = a\right\}$$

z działaniem mnożenia macierzy tworzy grupę.

Zadanie 3. Rozważmy endomorfizm $f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to (ax + y, 2y, bz - y) \in \mathbb{R}^3$, gdzie $a, b \in \mathbb{R}$ to nieznane parametry. Dobierz je w ten sposób, aby endomorfizm f posiadał jedną potrójną wartość własną; następnie sprawdź, czy jest on wówczas diagonalizowalny.

Zadanie 4. W przestrzeni π_3 (π_k – przestrzeń wielomianów rzeczywistych stopnia co najwyżej k) wprowadzamy iloczyn skalarny

$$\langle f, g\rangle = \textstyle\sum_{k=0}^3 f^{(k)}(0)\, g^{(k)}(0),$$

gdzie $h^{(k)}$ oznacza k-tą pochodną h, $h^{(0)} = h$. Wyznacz rzut ortogonalny elementu $u(x) = (x+1)^3$ na podprzestrzeń π_2.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *Termin 2. – 06.02.2019*

Zadanie 1. Sprawdź, czy zbiór rozwiązań równania $s^{2019} = 1$ z działaniem

$$h(s_1, s_2) = \overline{s_1 s_2}$$

tworzy grupę.

Zadanie 2. Niech $f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to (ax + y, 2y, bz - y) \in \mathbb{R}^3$. Wyznacz te wartości parametrów $a, b \in \mathbb{R}$, dla których endomorfizm f jest diagonalizowalny.

Zadanie 3. Wyznacz bazy ortonormalne (w sensie naturalnego iloczynu skalarnego w $\mathbb{R}^3$) jądra oraz obrazu endomorfizmu z poprzedniego zadania. Przyjmij $a = b = 0$.

Zadanie 4. Punkt $x_0 \in X$ nazywam punktem stałym odwzorowania $f : X \to X$ jeżeli $f(x_0) = x_0$. Zbadaj liczbę puntów stałych odwzorowania

$$f : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to (2x + (a-1)y + 2z + 1, x - y, 2x + 2y + (a+1)z - 2) \in \mathbb{R}^3$$

w zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *Termin 3. – 14.02.2019*

Zadanie 1. Znajdź wszystkie liczby zespolone z spełniające warunek $z^3|z| = (4 - 4\sqrt{3}i)\overline{z}$.

Zadanie 2. Wyznacz, o ile istnieje, macierz o wektorach własnych

$$v_1 = (2, 1, 1)^T, v_2 = (-1, 1, 0)^T, v_3 = (3, 0, 1)^T.$$

Ile jest takich macierzy?

Zadanie 3. Rozważmy układ równań liniowych $Ax = b$, gdzie $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ oraz $b \in \mathbb{R}^2$. Niech w_A oraz w_1, w_2 oznaczają wyznacznik macierzy A oraz wyznaczniki macierzy powstałych z macierzy A przez zastąpienie odpowiednio jej pierwszej i drugiej kolumny wektorem b. Co wiemy o liczbie rozwiązań układ równań $Ax = b$, jeżeli $w_A = w_1 = w_2 = 0$? Odpowiedź uzasadnij; podaj stosowne przykłady.

Zadanie 4. Zbadaj określoność formy kwadratowej

$$\varphi(x, y, z) = x^2 + 4xy + 2xz + 5y^2 + 2yz + 3z^2,$$

następnie wyznacz liczbę rozwiązań równania $\varphi(x, y, z) = a$ w zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *Termin 1. – 31.01.2020*

Zadanie 1. Sprawdź, czy zbiór liczb całkowitych $\mathbb{Z}$ z działaniem $x * y = (-1)^x y + (-1)^y x$ tworzy grupę. Następnie, wykorzystując własności struktury $(\mathbb{Z}, *)$, znajdź rozwiązania całkowite x równania $((2 * x) - x) * x = 0$.

Zadanie 2. Znajdź bazę Jordana przestrzeni π_1 (tj. wielomianów stopnia co najwyżej pierwszego) dla endomorfizmu $F : \pi_1 \ni \varphi(x) \to \varphi'(1) + 3\varphi(0) + (\varphi(5) - 2\varphi(0))x \in \pi_1$. Sprawdź poprawność wyniku, wyznaczając macierz endomorfizmu F w tej bazie. Czy endomorfizm F jest diagonalizowalny?

Zadanie 3. Zbadaj określoność formy kwadratowej $\varphi(x, y, z) = x^2 + 4xy + (a+4)y^2 - 2ayz + 2az^2$ w zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$.

Zadanie 4. Wyznacz rzut ortogonalny elementu $u = (1, 1, 1, 1)$ na obraz odwzorowania liniowego

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to (0, x + y, 2x - 2y + z, 0) \in \mathbb{R}^4;$$

w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ przyjmij naturalny iloczyn skalarny.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *Termin 2. – 07.02.2020*

Zadanie 1. Znajdź wszystkie rozwiązania $z \in \mathbb{C}$ równania $z^5 - (\operatorname{ctg} \beta + i)^4 \overline{z} = 0$, w którym $\beta \in (0, \pi)$.

Zadanie 2. Czy każda macierz $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ spełniająca warunek

$$\operatorname{rank}(A + I) = \operatorname{rank}(A - I) = 2$$

jest diagonalizowalna? Odpowiedź uzasadnij; w przypadku, gdy jest ona pozytywna wyznacz A^{2020}.

Zadanie 3. Wielomian $\varphi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda - 1$ jest wielomianem charakterystycznym pewnej macierzy kwadratowej A. Oblicz wyznacznik oraz ślad macierzy $-A^3 + A^2 + 3A - I$.

Zadanie 4. Wyznacz te wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których nierówność

$$(x + y)^2 + (x - y)^2 > axy$$

jest spełniona przez wszystkie liczby $x, y \in \mathbb{R}$ spełniające warunek $x^2 + y^2 > 0$.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *Termin 3. – 13.02.2020*

Zadanie 1. Znajdź wszystkie rozwiązania równania $(z - i)^2 + (\overline{z} + i)^2 = 0$ oraz zaznacz na płaszczyźnie zespolonej te spośród nich, dla których $\frac{\pi}{6} < \operatorname{Arg} z < \frac{\pi}{3}$.

Zadanie 2. Znajdź, dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

jej rozkład na iloczyn macierzy $P \cdot J_A \cdot P^{-1}$, gdzie J_A to macierz Jordana, a P macierz nieosobliwa. Następnie, wykorzystując ten rozkład, wskaż cztery różne macierze $B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ spełniające warunek $B^2 = A$.

Zadanie 3. Wyznacz bazę jądra oraz bazę obrazu odwzorowania liniowego

$$F : \pi_1 \ni \varphi(x) \to x\varphi'(0) + x^2\varphi'(1) \in \pi_2;$$

π_n oznacza przestrzeń wielomianów rzeczywistych stopnia co najwyżej n.

Zadanie 4. Wyznacz rzut ortogonalny u^* wektora $u = (3, 4, -1)$ na podprzestrzeń liniową

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\right\}.$$

Jaką interpretację geometryczną ma wielkość $\|u - u^*\|$? W przestrzeni $\mathbb{R}^3$ rozważamy naturalny iloczyn skalarny.

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *Termin 1 – 04.02.2021*

Zadanie 1. W zbiorze $G = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det(X - I_n) \neq 0\}$ wprowadzamy działanie

$$h : G \times G \ni (A, B) \to A + B - AB \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

(a) Uzasadnij, że działanie h jest wewnętrzne w zbiorze G.

(b) Wykaż, że dla dowolnej macierzy $A \in G$ jedynym rozwiązaniem równania

$$h(X, A) = 2I_n$$

jest $X = I_n - (A - I_n)^{-1}$. Czy rozwiązanie to należy do zbioru G?

Zadanie 2.

(a) Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zbiór

$$\left\{z \in \mathbb{C} : \pi < \operatorname{Arg}(-iz^3) < 2\pi \quad \text{oraz} \quad 5 < |(3 + 4i)z| < 10\right\}.$$

(b) Rozwiąż równanie
$$iz\,|z|^2 + (2+2i)\,|z|^2 = 2\,(z-i)\,\overline{z}$$
ze względu na niewiadomą $z \in \mathbb{C}$.

Zadanie 3. Wektory v_1, v_2, v_3 stanowią bazę pewnej przestrzeni liniowej X, na której określono endomorfizm $f : X \to X$, taki że
$$f\,(v_1) = 3v_1 - v_2, \qquad f(v_2) = v_1 + v_2, \qquad f(v_3) = 2v_3.$$

(a) Wyznacz macierz A_f (w bazie v_1, v_2, v_3), jądro oraz obraz endomorfizmu f.

(b) Wyznacz wartości własne oraz odpowiadające im liniowo niezależne wektory własne endomorfizmu f; wektory własne zapisz jako kombinacje liniowe wektorów v_1, v_2, v_3.

(c) Przyjmując, że $X = \pi_2$ oraz $v_1(x) = 1$, $v_2(x) = x$, $v_3(x) = x^2$, wyznacz $f(\varphi)$, gdzie
$$\varphi(x) = (x-1)^2.$$

Zadanie 4. Zbadaj określoność formy kwadratowej
$$\varphi : \mathbb{R}^3 \ni x \to x^T \begin{pmatrix} -2 & -5 & -6 \\ -3 & -8 & -6 \\ 0 & -6 & -9 \end{pmatrix} x \in \mathbb{R}^3.$$

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *Termin 2 – 11.02.2021*

Zadanie 1. Wyznacz tę wartość parametru $a \in \mathbb{R}$, dla której liczba $z_1 = 1 + i$ jest rozwiązaniem równania
$$z^3 + az^2 - (a+i)\,z + 2 - 2i = 0;$$
następnie wyznacz pozostałe jego rozwiązania.

Zadanie 2. Rozważmy zadanie polegające na wyznaczeniu wielomianów $\varphi \in \pi_2$ spełniających następujące warunki
$$\varphi\,(-2) = 2, \qquad \varphi\,(2) = -6.$$

(a) Zapisz powyższe warunki w postaci układu równań liniowych
$$Ax = b,$$
w którym macierz $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ i wektor $b \in \mathbb{R}^2$ są znane, a $x \in \mathbb{R}^3$ to poszukiwany wektor współczynników wielomianu φ.

(b) Wykorzystując metodę eliminacji Gaussa sprowadź macierz uzupełnioną U układu do postaci schodkowej, następnie porównaj rzędy macierzy A oraz U i wyciągnij wniosek na temat liczby rozwiązań tego układu.

(c) Wyznacz rozwiązania układu i sprawdź, że faktycznie definiują one wielomiany spełniające zadane warunki.

Zadanie 3. Wyznacz bazę Jordana przestrzeni π_2 dla endomorfizmu f,
$$f : \pi_2 \ni ax^2 + bx + c \to 2ax^2 + (2b - a - c)\,x + 2c \in \pi_2;$$
sprawdź poprawność wyniku poprzez wyznaczenie macierzy endomorfizmu f w uzyskanej bazie.

Zadanie 4. Wyznacz rzut ortogonalny wektora $u = (3, -1, 1)^T$ na podprzestrzeń liniową
$$V = \{(x,y,z) : x + y - z = 0, \quad x - y = 0\}\,;$$
w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ przyjmij iloczyn skalarny s,
$$s\,(x,y) = x^T \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y.$$

Egzamin z algebry liniowej – Automatyka i robotyka *Termin 3 – 18.02.2021*

Zadanie 1. Wyznacz tę wartość parametru $a \in \mathbb{C}$, dla której liczba $z_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ jest jednym z rozwiązań równania

$$z^6 = a;$$

następnie wyznacz pozostałe jego rozwiązania.

Zadanie 2. Układ równań

$$\begin{cases} x - y - 3z &= 2 \\ 2x - 5y + 6z &= -5 \\ 4x - 5y - 8z &= 5 \end{cases}$$

zapisz w postaci mecierzowej; następnie, stosując metodę eliminacji Gaussa, sprowadź macierz uzupełnioną tego układu do postaci schodkowej i wyciągnij wnioski na temat liczby jego rozwiązań. Wykorzystując postać schodkową macierzy uzupełnionej wyznacz te rozwiązania (o ile układ nie jest sprzeczny).

Zadanie 3. Uzasadnij, że każda macierz rzeczywista wymiaru 2×2 o ujemnym wyznaczniku jest diagonalizowalna. Podaj przykład pokazujący, że taka zależność nie jest prawdziwa dla macierzy zespolonych wymiaru 2×2.

Zadanie 4. Dla macierzy symetrycznej

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

znajdź taką macierz nieosobliwą $P \in \mathbb{R}^{3\times3}$, dla której macierz P^TAP jest macierzą diagonalną. Sprawdź poprawność wyniku wyznaczając iloczyn P^TAP.