Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej, czytelnie podpisanej kartce.

Zadanie 1. Liczby $a, b, c \in \mathbb{C}$ to pierwiastki wielomianu $f(x) = x^3 - (1-i)x^2 - x - i$. Wyznacz $\mathfrak{Re}(w)$, gdzie

$$w = \left(\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab}\right)^{2018}.$$

Przykładowe rozwiązanie: Ponieważ

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} = \frac{a^2+b^2+c^2}{abc} = \frac{(a+b+c)^2 - 2(ab+ac+bc)}{abc},$$

zatem, wykorzystując wzory Viete'a, otrzymujemy

$$\frac{a}{bc} + \frac{b}{ac} + \frac{c}{ab} = \frac{(1-i)^2+2}{i} = \frac{2(1-i)}{i} = -2-2i$$

i dalej

$$\mathfrak{Re}(w) = \mathfrak{Re}(-2-2i)^{2018} = 2^{2018}\mathfrak{Re}\left(\left((1+i)^2\right)^{1009}\right) = 2^{3027}\mathfrak{Re}(i) = 0.$$

Zadanie 2. Wiadomo, na podstawie twierdzenia Cayleya–Hamiltona, że wielomian charakterystyczny macierzy kwadratowej jest jej wielomianem zerującym. Wykorzystując ten fakt uzasadnij, że dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ oraz dla dowolnej liczby naturalnej n istnieją liczby $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$, dla których $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_2$.

Przykładowe rozwiązanie: Oczywiście, $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$. Niech $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Ponieważ

$$\varphi_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = \lambda^2 - \operatorname{tr}(A)\lambda + \det A$$

zatem na podstawie twierdzenia Cayleya–Hamiltona

$$A^2 = \operatorname{tr}(A)A - (\det A)I_2$$

skąd wynika, że $\alpha_2 = \operatorname{tr}(A)$, $\beta_2 = -\det A$. Załóżmy, że istnieją $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$, dla których $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_2$. Wykażemy indukcyjnie, że również $A^{n+1} = \alpha_{n+1}A + \beta_{n+1}I_2$, dla pewnych $\alpha_{n+1}, \beta_{n+1} \in \mathbb{R}$. Mamy

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= AA^n = A(\alpha_n A + \beta_n I_2) = \alpha_n A^2 + \beta_n A = \alpha_n(\operatorname{tr}(A)A - (\det A)I_2) + \beta_n A = \\ &= (\alpha_n \operatorname{tr}(A) + \beta_n)A - \alpha_n(\det A)I_2, \end{aligned}$$

skąd wynika, że $\alpha_{n+1} = \alpha_n \operatorname{tr}(A) + \beta_n$ oraz $\beta_{n+1} = -\alpha_n(\det A)$.

Zadanie 3. Sprawdź, czy istnieje baza przestrzeni π_2 (tj. wielomianów rzeczywistych stopnia nie większego niż 2), w której macierzą endomorfizmu $F : \pi_2 \ni ax^2 + bx + c \to (2a-b)x^2 + 2bx + 2c + b \in \pi_2$ jest macierz

$$A_F = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Odpowiedź uzasadnij.

Przykładowe rozwiązanie: Przyjmijmy w π_2 bazę $v_1(x) = 1, v_2(x) = x, v_3(x) = x^2$. Ponieważ

$$F(v_1) = 2v_1,\ F(v_2) = v_1 + 2v_2 - v_3,\ F(v_3) = 2v_3,$$

zatem w przyjętej bazie odwzorowanie F jest reprezentowane przez macierz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Należy sprawdzić, czy macierze A_F i A są podobne. Łatwo sprawdzić, że

$$\varphi_A(\lambda) = \varphi_{A_F}(\lambda) = -(\lambda - 2)^3 .$$

Ponieważ

$$\operatorname{rank}(A - 2I) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

oraz

$$\operatorname{rank}(A_F - 2I) = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

zatem macierze te podobne są do tej samej macierzy Jordana J

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Odpowiedź jest więc pozytywna.

Zadanie 4. Zbadaj liczbę rozwiązań układu równań

$$\begin{pmatrix} 2 & a-1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ a \\ -1 \end{pmatrix}$$

w zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$.

Przykładowe rozwiązanie: Niech

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & a \\ -1 & 1 & a & -1 \end{pmatrix}.$$

Z postaci macierzy A wynika, że jej wyznacznik jest wielomianem stopnia 2 względem a, który zeruje się dla $a = -1$ (pierwsza i trzecia kolumna liniowo zależne) oraz dla $a = 3$ (dwa pierwsze wiersze liniowo zależne). Dla $a \neq -1$ oraz $a \neq 3$ mamy zatem jedno rozwiązanie. Dla $a = -1$

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

zatem mamy nieskończenie wiele rozwiązań (zależnych od jednego parametru: $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(U) = 2$). Z kolei dla $a = 3$ mamy

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 8 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

Oznacza to, że układ jest sprzeczny (mamy: $2 = \operatorname{rank}(A) < \operatorname{rank}(U) = 3$).

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej, czytelnie podpisanej kartce.

Zadanie 1. Liczby z_1, z_2, z_3, z_4 to pierwiastki algebraiczne czwartego stopnia z liczby $z = 20+18i$. Wyznacz

$$w = (1-z_1)^2 + (1-z_2)^2 + (1-z_3)^2 + (1-z_4)^2 .$$

Przykładowe rozwiązanie: Liczby z_1, z_2, z_3, z_4 to pierwiastki wielomianu $z \to z^4 - 20 - 18i$. Ponieważ

$$\begin{aligned} w &= 4 - 2(z_1+z_2+z_3+z_4) + z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 + z_4^2 = \\ &= 4 - 2(z_1+z_2+z_3+z_4) + (z_1+z_2+z_3+z_4)^2 + \\ &- 2(z_1z_2 + z_1z_3 + z_1z_4 + z_2z_3 + z_2z_4 + z_3z_4), \end{aligned}$$

zatem, wykorzystując wzory Viete'a, otrzymujemy

$$\begin{aligned} z_1+z_2+z_3+z_4 &= 0, \\ z_1z_2 + z_1z_3 + z_1z_4 + z_2z_3 + z_2z_4 + z_3z_4 &= 0, \end{aligned}$$

i ostatecznie $w = 4$.

Zadanie 2. Niech $a \neq b$ będą dowolnymi elementami. W zbiorze $\mathcal{F} = \{f_1, f_2\}$, gdzie f_1, f_2 to funkcje prowadzące z $\{a, b\}$ w $\{a, b\}$ postaci

$$f_1(x) = \begin{cases} a, & \text{dla } x = a \\ b, & \text{dla } x = b \end{cases}, \qquad f_2(x) = \begin{cases} b, & \text{dla } x = a \\ a, & \text{dla } x = b \end{cases},$$

wprowadzamy działanie $\circ$ składania odwzorowań, tj. $(f \circ g)(x) = f(g(x))$. Sprawdź, czy struktura algebraiczna $(\mathcal{F}, \circ)$ jest grupą abelową.

Przykładowe rozwiązanie: Przez bezpośredni rachunek sprawdzamy, że $f_1 \circ f_1 = f_1$, $f_1 \circ f_2 = f_2 \circ f_1 = f_2$ oraz $f_2 \circ f_2 = f_1$. Np.

$$\begin{aligned} (f_2 \circ f_1)(a) &= f_2(f_1(a)) = f_2(a) = b, \\ (f_2 \circ f_1)(b) &= f_2(f_1(b)) = f_2(b) = a, \end{aligned}$$

czyli $f_2 \circ f_1 = f_2$. Wynika stąd, że

(a) działanie $\circ$ jest wewnętrzne w $\mathcal{F}$;

(b) działanie $\circ$ posiada element neutralny $e = f_1$;

(c) każdy element posiada element symetryczny względem $\circ$ w $\mathcal{F}$: $\widetilde{f_1} = f_1, \widetilde{f_2} = f_2$;

(d) działanie $\circ$ jest łączne (ogólna własność operacji składania funkcji);

(e) działanie $\circ$ jest przemienne.

Oznacza to, że struktura $(\mathcal{F}, \circ)$ jest grupą abelową.

Zadanie 3. Wyznacz bazę Jordana przestrzeni π_1 (tj. wielomianów rzeczywistych stopnia nie większego niż jeden) dla endomorfizmu $F : \pi_1 \ni ax + b \to (3a - b)x + a + b \in \pi_1$. Sprawdź poprawność wyniku poprzez wyznaczenie macierzy reprezentującej endomorfizm F w uzyskanej bazie.

Przykładowe rozwiązanie: Przyjmijmy $v_1(x) = 1, v_2(x) = x$. Ponieważ

$$F(v_1) = v_1 - v_2,\ \ F(v_2) = v_1 + 3v_2,$$

zatem w wybranej bazie v_1, v_2 endomorfizm F jest reprezentowany przez macierz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ponieważ $\varphi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2$ zatem macierz A posiada tylko jedną wartość własną $\lambda_0 = 2$. Odpowiadający jej wektor własny $v^{(1)} = (x, y)^T$ wyznaczymy z równania

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

otrzymujemy: $v^{(1)} = (t, t)^T$, $t \neq 0$. Wyznaczamy wektor główny rzędu drugiego $v^{(2)} = (x, y)^T$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix},$$

skąd wynika, że $v^{(2)} = (s, t+s)^T, s \in \mathbb{R}$. Przyjmując np. $s = t = 1$ otrzymujemy wektory $v^{(1)} = (1,1)^T, v^{(2)} = (1,2)^T$. Wektory te pozwalają wyznaczyć poszukiwaną bazę Jordana:

$$\begin{aligned} v^{(1)} = (1,1)^T &\rightsquigarrow w_1(x) = 1 \cdot v_1(x) + 1 \cdot v_2(x) = 1 + x \\ v^{(2)} = (1,2)^T &\rightsquigarrow w_2(x) = 1 \cdot v_1(x) + 2 \cdot v_2(x) = 1 + 2x. \end{aligned}$$

Sprawdźmy poprawność uzyskanego rozwiązania wyznaczając macierz J_F endomorfizmu F w bazie w_1, w_2:

$$\begin{aligned} F(w_1(x)) &= F(1 + x) = 2x + 2 = 2w_1(x), \\ F(w_2(x)) &= F(1 + 2x) = 5x + 3 = w_1(x) + 2w_2(x) \end{aligned}$$

i ostatecznie

$$J_F = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 4. Wyznacz rzut ortogonalny (w sensie naturalnego iloczynu skalarnego przestrzeni $\mathbb{R}^3$) elementu $u = (6, 2, -4)^T$ na podprzestrzeń liniową rozpiętą przez wektory $v_1 = (2, 0, -1)^T$, $v_2 = (1, -5, 2)^T$.

Przykładowe rozwiązanie: Musimy wyznaczyć bazę ortonormalną przestrzeni rozpiętej przez wektory v_1, v_2. Ponieważ $v_1 \circ v_2 = 0$, zatemy wystarczy jedynie podzielić wektory v_1, v_2 przez ich długość:

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{\sqrt{5}}{5}(2, 0, -1)^T, \\ w_2 &= \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{\sqrt{30}}{30}(1, -5, 2)^T. \end{aligned}$$

Poszukiwany wektor u^* to zatem

$$\begin{aligned} u^* &= (u \circ w_1) \cdot w_1 + (u \circ w_2) \cdot w_2 = \\ &= \frac{16\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{5}(2, 0, -1)^T - \frac{12\sqrt{30}}{30} \cdot \frac{\sqrt{30}}{30}(1, -5, 2)^T = \\ &= \frac{1}{5}(32, 0, -16)^T - \frac{1}{5}(2, -10, 4)^T = (6, 2, -4)^T = u. \end{aligned}$$

Każde zadanie należy rozwiązać na osobnej, czytelnie podpisanej kartce.

Zadanie 1. Niech $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz $n \in \mathbb{N}$. Podane liczby zespolone zapisz w postaci trygonometrycznej:

$$z_1 = (\cos\alpha + i\sin\alpha)^n, \quad z_2 = (\cos\alpha - i\sin\alpha)^n, \quad z_3 = (\sin\alpha + i\cos\alpha)^n, \quad z_4 = (\sin\alpha - i\cos\alpha)^n \ .$$

Przykładowe rozwiązanie: Bezpośrednio ze wzoru de Moivre'a otrzymujemy

$$z_1 = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$$

oraz

$$z_2 = (\cos\alpha - i\sin\alpha)^n = (\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha))^n = \cos(-n\alpha) + i\sin(-n\alpha)\,.$$

Podobnie,

$$\begin{aligned} z_3 &= (\sin\alpha + i\cos\alpha)^n = (i(\cos\alpha - i\sin\alpha))^n = i^n z_2 = \\ &= (\cos\pi/2 + i\sin\pi/2)^n(\cos(-n\alpha) + i\sin(-n\alpha)) = \\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)n + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)n \end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned} z_4 &= (\sin\alpha - i\cos\alpha)^n = (-i(\cos\alpha + i\sin\alpha))^n = (-i)^n z_1 = \\ &= (\cos(-\pi/2) + i\sin(-\pi/2))^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = \\ &= \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)n + i\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)n. \end{aligned}$$

Zadanie 2. Sprawdź, czy podane macierze są podobne

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

w przypadku pozytywnej odpowiedzi wyznacz macierz P dla której $A = PBP^{-1}$.

Przykładowe rozwiązanie: Dla dowolnej macierzy nieosobliwej P mamy

$$PBP^{-1} = P(2I_3)P^{-1} = 2I_3 = B,$$

czyli jedyną macierzą podobną do macierzy B jest ona sama. Macierze A i B nie są więc podobne.

Zadanie 3. Wyznacz wszystkie miejsca zerowe wielomianu $\varphi(x) = x^6 + 1$; następnie przedstaw go jako iloczyn wielomianów rzeczywistych stopnia co najwyżej drugiego.

Przykładowe rozwiązanie: Oczywiście $\varphi(x) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$x^6 = -1 = \cos(-\pi) + i\sin(-\pi)\,.$$

Stąd

$$\begin{aligned} x_0 &= \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \\ x_1 &= \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \\ x_2 &= \cos\frac{3\pi}{6} + i\sin\frac{3\pi}{6} = i \\ x_3 &= \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} \\ x_4 &= \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2} \\ x_5 &= \cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6} = -i. \end{aligned}$$

oraz

$$\varphi(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)(x - x_5).$$

Ponieważ

$$\begin{aligned}
(x - x_0)(x - x_1) &= (x - x_0)(x - \overline{x_0}) = x^2 - \sqrt{3}x + 1 \\
(x - x_2)(x - x_5) &= (x - x_2)(x - \overline{x_2}) = x^2 + 1 \\
(x - x_3)(x - x_4) &= (x - x_3)(x - \overline{x_3}) = x^2 + \sqrt{3}x + 1
\end{aligned}$$

zatem

$$\varphi(x) = \left(x^2 + 1\right)\left(x^2 - \sqrt{3}x + 1\right)\left(x^2 + \sqrt{3}x + 1\right).$$

Zadanie 4. Niech $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ będzie macierzą postaci

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2a+1 & 3a \\ -1 & a & a+1 \end{pmatrix}.$$

Wyznacz zbiór tych parametrów $a \in \mathbb{R}$, dla których funkcja $\varphi : \mathbb{R}^3 \ni x \to x^T A x \in \mathbb{R}$ przyjmuje jedynie wartości nieujemne.

Przykładowe rozwiązanie: Ponieważ dla $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ mamy

$$\begin{aligned}
\varphi(x) &= x_1^2 + (2a+1)x_2^2 + (a+1)x_3^2 + 2x_1x_2 + 4ax_2x_3 = \\
&= (x_1 + x_2)^2 + 2a(x_2 + x_3)^2 + (1-a)x_3^2
\end{aligned}$$

zatem forma kwadratowa φ jest dodatnio półokreślona wtedy i tylko wtedy, gdy $a \geq 0$ oraz $1 - a \geq 0$, czyli dla $a \in [0, 1]$.

Zadanie 1. Znajdź wszystkie liczby zespolone z spełniające warunek $z^3|z| = (4-4\sqrt{3}i)\overline{z}$.

Przykładowe rozwiązanie Rozwiązania poszukamy w postaci trygonometrycznej $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, w której $r \geq 0$ oraz $\alpha \in [0, 2\pi)$. Ponieważ

$$z^3|z| = r^4(\cos 3\alpha + i\sin 3\alpha)$$

oraz

$$\begin{aligned}(4-4\sqrt{3}i)\overline{z} &= 8(\cos\pi/3 - i\sin\pi/3)\cdot r(\cos\alpha - i\sin\alpha) = \\ &= 8r(\cos(-\pi/3-\alpha) + i\sin(-\pi/3-\alpha))\end{aligned}$$

zatem wyjściowe równanie równoważne jest układowi

$$\begin{cases} r^4 = 8r \\ 3\alpha = -\pi/3 - \alpha + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}. \end{cases}$$

którego rozwiązania to

$$\begin{cases} r = 0 \text{ lub } r = 2 \\ \alpha = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2},\ \text{dla } k = 1,2,3,4. \end{cases}.$$

Ostatecznie, zbiór rozwiązań to $\{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4\}$, gdzie $z_0 = 0$ oraz

$$z_k = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}\right)\right)$$

dla $k = 1,2,3,4$.

Zadanie 2. Wyznacz, o ile istnieje, macierz o wektorach własnych $v_1 = (2,1,1)^T$, $v_2 = (-1,1,0)^T$, $v_3 = (3,0,1)^T$. Ile jest takich macierzy?

Przykładowe rozwiązanie (sposób 1) Poszukiwaną macierzą może być macierz jednostkowa I_3 (dla każdego wektora $v \in \mathbb{R}^3$ mamy przecież $I_3v = v$ co oznacza, że każdy wektor $v \neq 0$ jest wektorem własnym macierzy I_3 odpowiadającym jej jedynej wartości własnej $\lambda = 1$). Może nią być również macierz αI_3 dla dowonego $\alpha \in \mathbb{C}$. Faktycznie, $\alpha I_3 v = \alpha v$, czyli wektor $v \neq 0$ jest wektorem własnym macierzy αI_3 odpowiadającym jej jedynej wartości własnej $\lambda = \alpha$. Macierzy takich jest zatem nieskończenie wiele.

Przykładowe rozwiązanie (sposób 2) Łatwo stwierdzić, że wektory v_1, v_2, v_3 są liniowo zależne ($v_3 = v_1 - v_2$), wyznaczają więc pewną płaszczyznę. Jej równanie to $x + y - 3z = 0$. Poszukiwaną macierzą będzie zatem każda macierz odpowiadająca układowi równań o takim właśnie rozwiązaniu (wektory v_1, v_2, v_3 będą jej wektorami własnymi odpowiadającymi wartości własnej $\lambda = 0$), np.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ \alpha & \alpha & -3\alpha \\ \beta & \beta & -3\beta \end{pmatrix},\ \text{dla } \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Zadanie 3. Rozważmy układ równań liniowych $Ax = b$, gdzie $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ oraz $b \in \mathbb{R}^2$. Niech w_A oraz w_1, w_2 oznaczają wyznacznik macierzy A oraz wyznaczniki macierzy powstałych z macierzy A przez zastąpienie odpowiednio jej pierwszej i drugiej kolumny wektorem b. Co wiemy o liczbie rozwiązań układ równań $Ax = b$, jeżeli $w_A = w_1 = w_2 = 0$? Odpowiedź uzasadnij; podaj stosowne przykłady.

Przykładowe rozwiązanie Niech $U = [A, b]$. Z treści wynika jedynie, że $\operatorname{rank}(A) \leq 1$ oraz $\operatorname{rank}(U) \leq 1$. Na podstawie tw. Kroneckera–Capellego (zob. tw. 6.4, http://home.agh.edu.pl/gora/algebra/Wyklad06.pdf), aby układ $Ax = b$ posiadał rozwiązanie musi zachodzić równość $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(U) = r$, mamy wówczas nieskończenie wiele rozwiązań zależnych o jednego (gdy $r = 1$) lub dwóch (gdy $r = 0$) parametrów. Przypadki te są ilustrowane przez poniższe przykłady:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \rightsquigarrow \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(U) = 1,$$

$$\begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases} \rightsquigarrow \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(U) = 0.$$

Możliwy jest jeszcze jeden scenariusz: $0 = \operatorname{rank}(A) < \operatorname{rank}(U) = 1$, wówczas układ $Ax = b$ jest sprzeczny. Tak jest, gdy $A = 0_{2\times 2}$ oraz $b \neq 0$, np.

$$\begin{cases} 0x + 0y = 1 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases} \rightsquigarrow 0 = \operatorname{rank}(A) < \operatorname{rank}(U) = 1.$$

Zadanie 4. Zbadaj określoność formy kwadratowej $\varphi(x, y, z) = x^2 + 4xy + 2xz + 5y^2 + 2yz + 3z^2$, następnie wyznacz liczbę rozwiązań równania $\varphi(x, y, z) = a$ w zależności od wartości parametru $a \in \mathbb{R}$.

Przykładowe rozwiązanie Ponieważ

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= x^2 + 4xy + 2xz + 5y^2 + 2yz + 3z^2 = \\ &= (x + 2y + z)^2 - 2yz + y^2 + 2z^2 = \\ &= (x + 2y + z)^2 + (y - z)^2 + z^2, \end{aligned}$$

zatem forma kwadratowa φ jest dodatnio określona. Wynika stąd, że dla $a < 0$ równanie $\varphi(x, y, z) = a$ nie posiada rozwiązań, zaś dla $a = 0$ posiada jedno rozwiązanie $(0, 0, 0)$. Aby zbadać ile rozwiązań posiada ono dla $a > 0$, zauważmy, że

$$\varphi(x, 0, z) = (x + z)^2 + 2z^2.$$

Stąd, przyjmując $u = x + z$, $w = \sqrt{2}z$, równanie $\varphi(x, 0, z) = a$ równoważne jest równaniu $u^2 + w^2 = a$, które opisuje okrąg o promieniu $\sqrt{a}$ i środku w punkcie $(0, 0)$. Ponieważ istnieje nieskończenie wiele punktów (u, w) leżących na tym okręgu, wnioskujemy, że istnieje nieskończenie wiele punktów $(x, 0, z)$ spełniających warunek $\varphi(x, 0, z) = a$ (wyznaczamy je jako rozwiązania układu równań $u = x + z$, $w = \sqrt{2}z$). Dla $a > 0$ równanie $\varphi(x, y, z) = a$ posiada zatem nieskończenie wiele rozwiązań.

Zadanie 1. Znajdź wszystkie rozwiązania $z \in \mathbb{C}$ równania $z^5 - (\operatorname{ctg}\beta + i)^4\,\overline{z} = 0$, w którym $\beta \in (0, \pi)$.

Przykładowe rozwiązanie Wyjściowe równanie możemy przepisać w postaci równoważnej

$$z^5 = (\operatorname{ctg}\beta + i)^4\,\overline{z}.$$

Jego rozwiązań poszukamy w postaci trygonometrycznej $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, w której $r \geq 0$ oraz $\alpha \in [0, 2\pi)$. Ponieważ

$$z^5 = r^5(\cos 5\alpha + i\sin 5\alpha)$$

oraz

$$\begin{aligned}(\operatorname{ctg}\beta + i)^4\,\overline{z} &= \left(\frac{1}{\sin\beta}(\cos\beta + i\sin\beta)\right)^4 \cdot r(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)) = \\ &= \frac{r}{\sin^4\beta}(\cos(4\beta - \alpha) + i\sin(4\beta - \alpha))\end{aligned}$$

zatem wyjściowe równanie równoważne jest układowi

$$\begin{cases} r^5 = \frac{r}{\sin^4\beta} \\ 5\alpha = 4\beta - \alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\end{cases}$$

którego rozwiązania to

$$\begin{cases} r = 0 \text{ lub } r = \frac{1}{\sin\beta} \\ \alpha = \frac{2}{3}\beta + \frac{1}{3}k\pi,\ \text{dla } k = 0, 1, 2, 3, 4, 5\end{cases}.$$

Ostatecznie, poszukiwany zbiór rozwiązań to $\{0, z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5\}$, gdzie

$$z_k = \frac{1}{\sin\beta}\left(\cos\left(\frac{2}{3}\beta + \frac{1}{3}k\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\beta + \frac{1}{3}k\pi\right)\right)$$

dla $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

Zadanie 2. Czy każda macierz $A \in \mathbb{C}^{4\times 4}$ spełniająca warunek $\operatorname{rank}(A + I) = \operatorname{rank}(A - I) = 2$ jest diagonalizowalna? Odpowiedź uzasadnij; w przypadku, gdy jest ona pozytywna wyznacz A^{2020}.

Przykładowe rozwiązanie Z warunku

$$\operatorname{rank}(A + I) = \operatorname{rank}(A - I) = 2$$

wynika, że

$$\det(A + I) = \det(A - I) = 0,$$

czyli $\lambda_1 = -1$ oraz $\lambda_2 = 1$ to wartości własne macierzy A. Dodatkowo, ponieważ

$$\dim\ker\left(A - \lambda_{1,2}I\right) = \dim X - \operatorname{rank}\left(A - \lambda_{1,2}I\right) = 4 - 2 = 2,$$

zatem dla każdej z tych wartości własnej istnieją po dwa wektory własne liniowo niezależne. Każdej z tych dwóch wartości własnych odpowiadają więc dwie klatki Jordana, a ponieważ wymiar macierzy to 4×4, zatem:

- innych wartości własnych macierz A posiadać nie może;
- wartości własne $\lambda_1 = -1$ oraz $\lambda_2 = 1$ muszą mieć najmniejszą możliwą krotność czyli 2.

Oznacza to, że macierz Jordana macierzy A jest postaci $\operatorname{diag}(1, 1, -1, -1)$; macierz A jest więc diagonalizowalna. Stąd

$$A = P\operatorname{diag}(1, 1, -1, -1)\,P^{-1}$$

czyli

$$\begin{aligned}A^{2020} &= P(\operatorname{diag}(1, 1, -1, -1))^{2020}\,P^{-1} \\ &= P\operatorname{diag}\left(1^{2020}, 1^{2020}, (-1)^{2020}, (-1)^{2020}\right)P^{-1} = I.\end{aligned}$$

Zadanie 3. Wielomian $\varphi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda - 1$ jest wielomianem charakterystycznym pewnej macierzy kwadratowej A. Oblicz wyznacznik oraz ślad macierzy $-A^3 + A^2 + 3A - I$.

Przykładowe rozwiązanie Na podstawie tw. Cayleya–Hamiltona wnioskujemy, że $\varphi_A(A) = 0_{3\times 3}$. Stąd

$$-A^3 + A^2 + 3A - I = A^2.$$

Mamy więc

$$\det\left(-A^3 + A^2 + 3A - I\right) = \det A^2 = (\det A)^2 = (\varphi_A(0))^2 = 1.$$

Niech $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ będą wartościami własnymi macierzy A. Wówczas

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\left(-A^3 + A^2 + 3A - I\right) &= \operatorname{tr} A^2 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ &= (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 - 2(\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3).\end{aligned}$$

Na podstawie wzorów Viete'a

$$\begin{aligned}\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 &= -\frac{a_2}{a_3} = 0 \\ \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 &= \frac{a_1}{a_3} = -3\end{aligned}$$

zatem ostatecznie $\operatorname{tr} A^2 = 6$.

Zadanie 4. Wyznacz te wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, dla których nierówność

$$(x+y)^2 + (x-y)^2 > axy$$

jest spełniona przez wszystkie liczby $x, y \in \mathbb{R}$ spełniające warunek $x^2 + y^2 > 0$.

Przykładowe rozwiązanie Nierówność możemy zapisać w postaci równoważnej

$$2x^2 + 2y^2 - axy > 0, \qquad \text{dla } x^2 + y^2 > 0.$$

Ponieważ

$$x^2 + y^2 > 0 \iff (x, y) \neq (0, 0)$$

zatem należy wyznaczyć te wartości $a \in \mathbb{R}$, dla których forma kwadratowa $\varphi(x, y) = 2x^2 + 2y^2 - axy$ jest dodatnio określona. Wyznaczając macierz A_φ formy φ

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} 2 & -a/2 \\ -a/2 & 2 \end{pmatrix}$$

widzimy, że jest ona dodatnio określona wtedy i tylko wtedy, gdy $\det A = 4 - a^2/4 > 0$. Stąd $a \in (-4, 4)$.

Zadanie 1. [5p+5p] W zbiorze $G = \{X \in \mathbb{R}^{n\times n} : \det(X - I_n) \neq 0\}$ wprowadzamy działanie

$$h : G \times G \ni (A, B) \to A + B - AB \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

(a) Uzasadnij, że działanie h jest wewnętrzne w zbiorze G.

(b) Wykaż, że dla dowolnej macierzy $A \in G$ jedynym rozwiązaniem równania

$$h(X, A) = 2I_n$$

jest $X = I_n - (A - I_n)^{-1}$. Czy rozwiązanie to należy do zbioru G?

Przykładowe rozwiązanie Ad. (a) Należy wykazać, że $h(A, B) \in G$ dla dowolnych $A, B \in G$. Oczywiście $h(A, B) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ oraz

$$\begin{aligned}\det(h(A,B) - I_n) &= \det(A + B - AB - I_n) = \det(A - I_n - (A - I_n)B) = \\ &= \det((A - I_n)(I_n - B)) = (-1)^n \det(A - I_n)\det(B - I_n) \neq 0,\end{aligned}$$

a to oznacza, że działanie h jest wewnętrzne w zbiorze G.

Ad. (b) Zapiszmy równanie $h(X, A) = 2I_n$ w postaci równoważnej

$$X + A - XA = 2I_n.$$

Stąd

$$X(I_n - A) = 2I_n - A.$$

Ponieważ $A \in G$, zatem macierz $I_n - A$ jest nieosobliwa; po wymnożeniu równania prawostronnie przez macierz $(I_n - A)^{-1}$ mamy

$$X = (2I_n - A)(I_n - A)^{-1} = (I_n + I_n - A)(I_n - A)^{-1} = (I_n - A)^{-1} + I_n.$$

Ponieważ $(I_n - A)^{-1} = -(A - I_n)^{-1}$ zatem część pierwsza jest wykazana. Zauważmy również, że

$$\det(X - I_n) = \det\left(I_n - (A - I_n)^{-1} - I_n\right) = \det\left(-(A - I_n)^{-1}\right) = (-1)^n \det(A - I_n)^{-1} \neq 0,$$

co oznacza, że $X \in G$.

Zadanie 2. [5p+5p]

(a) Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zbiór

$$\left\{z \in \mathbb{C} : \pi < \operatorname{Arg}(-iz^3) < 2\pi \quad \text{oraz} \quad 5 < |(3 + 4i)z| < 10\right\}.$$

(b) Rozwiąż równanie

$$iz|z|^2 + (2 + 2i)|z|^2 = 2(z - i)\overline{z}$$

ze względu na niewiadomą $z \in \mathbb{C}$.

Przykładowe rozwiązanie Ad. (a) Ponieważ

$$\operatorname{Arg}\left(-iz^3\right) = \operatorname{Arg}(-i) + 3\operatorname{Arg} z + 2k\pi = \frac{3}{2}\pi + 3\operatorname{Arg} z + 2k\pi$$

zatem warunek

$$\pi < \operatorname{Arg}(-iz^3) < 2\pi$$

równoważny jest warunkowi

$$-\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}<\operatorname{Arg} z<\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}, \qquad \text{dla } k=0,1,2.$$

Z kolei, $|(3+4i)z| = 5\,|z|$, zatem

$$5<|(3+4i)z|<10 \Leftrightarrow 1<|z|<2.$$

Rozwiązanie jest częścią wspólną tych obszarów.

Ad. (b) Ponieważ $|z|^2 = z\overline{z}$, zatem równanie możemy zapisać w postaci równoważnej

$$iz^2\overline{z}+(2+2i)\,z\overline{z}-2\,(z-i)\,\overline{z}=\overline{z}\left(iz^2+2iz+2i\right)=0.$$

Stąd $z=0$ lub

$$0=iz^2+2iz+2i=i\left(z^2+2z+2\right)=i\left((z+1)^2+1\right)=i\,(z+1+i)\,(z+1-i)$$

i ostatecznie $z_1=0$, $z_2=-1-i$, $z_3=-1+i$.

Zadanie 3. [3p+4p+3p] Wektory v_1, v_2, v_3 stanowią bazę pewnej przestrzeni liniowej X, na której określono endomorfizm $f : X \to X$, taki że

$$f\left(v_1\right)=3v_1-v_2, \qquad f(v_2)=v_1+v_2, \qquad f(v_3)=2v_3.$$

(a) Wyznacz macierz A_f (w bazie v_1, v_2, v_3), jądro oraz obraz endomorfizmu f.

(b) Wyznacz wartości własne oraz odpowiadające im liniowo niezależne wektory własne endomorfizmu f; wektory własne zapisz jako kombinacje liniowe wektorów v_1, v_2, v_3.

(c) Przyjmując, że $X=\pi_2$ oraz $v_1(x)=1$, $v_2(x)=x$, $v_3(x)=x^2$, wyznacz $f(\varphi)$, gdzie

$$\varphi(x)=(x-1)^2.$$

Przykładowe rozwiązanie Ad. (a) Z treści wynika, że macierz A_f endomorfizmu f to

$$A_f=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ponieważ

$$3=\dim X=\dim\ker f+\dim\operatorname{Im} f=\dim\ker f+\operatorname{rank} A_f=\dim\ker f+3,$$

zatem wnioskujemy, że $\dim\ker f=0$, czyli $\ker f=\{0\}$ oraz $\dim\operatorname{Im} f=3$, czyli $\operatorname{Im} f=X$.

Ad. (b) Ponieważ

$$\varphi_{A_f}(\lambda)=\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}=-\left(\lambda-2\right)^3$$

zatem endomorfizm posiada jedną potrójną wartość własną $\lambda=2$. Ponadto

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x+y \\ -x-y \\ 0 \end{pmatrix},$$

co oznacza, że ogólna postać wektora własnego to $v=(t,-t,s)^T$, gdzie $t^2+s^2>0$. Przykładowe liniowo niezależne wektory własne macierz A_f to

$$w_1=(1,-1,0)^T, \quad w_2=(0,0,1)^T.$$

Wektory te wyznaczają następujące wektory własnej endomorfizmu f

$$\begin{aligned} w_1 &= (1, -1, 0)^T \rightsquigarrow V_1 = v_1 - v_2 \\ w_2 &= (0, 0, 1)^T \rightsquigarrow V_2 = v_3. \end{aligned}$$

Sprawdźmy:

$$f(V_1) = f(v_1 - v_2) = f(v_1) - f(v_2) = 3v_1 - v_2 - (v_1 + v_2) = 2v_1 - 2v_2 = 2V_1$$

oraz

$$f(V_2) = f(v_3) = 2v_3 = 2V_2.$$

Ad. (c) Ponieważ

$$\varphi(x) = (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1 = v_1(x) - 2v_2(x) + v_3(x)$$

zatem

$$\begin{aligned} f(\varphi) &= f(v_1 - 2v_2 + v_3) = f(v_1) - 2f(v_2) + f(v_3) = \\ &= 3v_1 - v_2 - 2(v_1 + v_2) + 2v_3 = v_1 - 3v_2 + 2v_3 \end{aligned}$$

czyli $f(\varphi)(x) = 1 - 3x + 2x^2$.

Zadanie 4. [10p] Zbadaj określoność formy kwadratowej

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \ni x \to x^T \begin{pmatrix} -2 & -5 & -6 \\ -3 & -8 & -6 \\ 0 & -6 & -9 \end{pmatrix} x \in \mathbb{R}^3.$$

Przykładowe rozwiązanie Dla $x = (a, b, c)^T$ mamy

$$\begin{aligned} \varphi(a, b, c) &= -2a^2 - 8ab - 6ac - 8b^2 - 12bc - 9c^2 = -\left(9c^2 + 12bc + 6ac\right) - 2a^2 - 8ab - 8b^2 = \\ &= -(3c + 2b + a)^2 - 4b^2 - a^2 - 4ab = -(3c + 2b + a)^2 - (a + 2b)^2, \end{aligned}$$

czyli forma φ jest ujemnie półokreślona.

Zadanie 1. Wyznacz tę wartość parametru $a \in \mathbb{R}$, dla której liczba $z_1 = 1 + i$ jest rozwiązaniem równania

$$z^3 + az^2 - (a+i)\,z + 2 - 2i = 0;$$

następnie wyznacz pozostałe jego rozwiązania.

Przykładowe rozwiązanie Podstawiając do równia $z = 1 + i$ otrzymujemy

$$0 = (1+i)^3 + a\,(1+i)^2 - (a+i)\,(1+i) + 2 - 2i = 1 - a - i\,(1-a)\,,$$

stąd $a = 1$. Możemy więc zapisać

$$z^3 + z^2 - (1+i)\,z + 2 - 2i = (z - 1 - i)\left(z^2 + bz + c\right).$$

Porównując wyrazy wolne otrzymujemy

$$2 - 2i = -c\,(1+i)$$

a stąd

$$c = -2\frac{1-i}{1+i} = 2i;$$

porównując współczynniki przy z^2 otrzymujemy

$$1 = b - 1 - i$$

a stąd

$$b = 2 + i.$$

Mamy więc

$$\begin{aligned} z^3 + z^2 - (1+i)\,z + 2 - 2i &= (z-1-i)\left(z^2 + (2+i)\,z + 2i\right) = (z-1-i)\left(z^2 + 2z + iz + 2i\right) \\ &= (z-1-i)\,(z\,(z+2) + i\,(z+2)) = (z-1-i)\,(z+2)\,(z+i) \end{aligned}$$

i ostatecznie

$$z_1 = -1 - i, z_2 = -2, z_3 = -i.$$

Zadanie 2. Rozważmy zadanie polegające na wyznaczeniu wielomianów $\varphi \in \pi_2$ spełniających następujące warunki

$$\varphi\,(-2) = 2, \qquad \varphi\,(2) = -6.$$

(a) Zapisz powyższe warunki w postaci układu równań liniowych

$$Ax = b,$$

w którym macierz $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ i wektor $b \in \mathbb{R}^2$ są znane, a $x \in \mathbb{R}^3$ to poszukiwany wektor współczynników wielomianu φ.

(b) Wykorzystując metodę eliminacji Gaussa sprowadź macierz uzupełnioną U układu do postaci schodkowej, następnie porównaj rzędy macierzy A oraz U i wyciągnij wniosek na temat liczby rozwiązań tego układu.

(c) Wyznacz rozwiązania układu i sprawdź, że faktycznie definiują one wielomiany spełniające zadane warunki.

Przykładowe rozwiązanie Niech $\varphi(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0$. Mamy

$$4a_2 - 2a_1 + a_0 = 2 \quad \text{oraz} \quad 4a_2 + 2a_1 + a_0 = -6.$$

Ad. (a) Przyjmując $x = (a_2, a_1, a_0)^T$ możemy zapisać powyższe warunki w postaci równoważnej

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Ad. (b) Mamy

$$\operatorname{rank} U = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & -6 \end{pmatrix} = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & -8 \end{pmatrix} = 2 = \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

czyli $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} U = 2$, a to oznacza, że układ posiada nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru.

Ad. (c) Wykorzystując postać schodkową macierzy U możemy napisać

$$4a_2 - 2a_1 + a_0 = 2 \quad \text{oraz} \quad 4a_1 = -8.$$

Stąd

$$a_1 = -2,\ a_0 = -2 - 4a_2,\ a_2 \in \mathbb{R}.$$

Wielomiany φ mają więc postać: $\varphi(s) = a_2 s^2 - 2s - 2 - 4a_2$. Faktycznie,

$$\varphi(-2) = 4a_2 + 4 - 2 - 4a_2 = 2$$

oraz

$$\varphi(2) = 4a_2 - 4 - 2 - 4a_2 = -6.$$

Zadanie 3. Wyznacz bazę Jordana przestrzeni π_2 dla endomorfizmu f,

$$f : \pi_2 \ni ax^2 + bx + c \to 2ax^2 + (2b - a - c)x + 2c \in \pi_2;$$

sprawdź poprawność wyniku poprzez wyznaczenie macierzy endomorfizmu f w uzyskanej bazie.

Przykładowe rozwiązanie Wybierzmy bazę w przestrzeni π_2 :

$$v_1(x) = 1, \quad v_2(x) = x, \quad v_3(x) = x^2.$$

Wówczas

$$\begin{aligned} f(v_1(x)) &= -x + 2 = 2v_1(x) - v_2(x), \\ f(v_2(x)) &= 2x = 2v_2(x), \\ f(v_3(x)) &= 2x^2 - x = -v_2(x) + 2v_3(x), \end{aligned}$$

skąd uzyskujemy postać macierzy endomorfizmu f w bazie v_1, v_2, v_3:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Ponieważ

$$\varphi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3,$$

zatem endomorfizm f posiada jedną potrójną wartość własną $\lambda = 2$. Wyznaczmy teraz wektory własne oraz wektory główne (wiemy już, że macierz nie posiada trzech liniowo niezależnych wektorów własnych, gdyż $A \neq 2I_3$) macierzy A. Niech $v^{(1)} = (x, y, z)^T$. Zatem

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x-z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow z = -x,$$

czyli $v^{(1)} = (t, r, -t)^T$, gdzie $t, r \in \mathbb{R}, \quad t^2 + r^2 > 0$. Macierz A (więc i endomorfizm f) posiada dwa liniowo niezależne wektory własne. Musimy więc wyznaczyć jeden wektor główny rzędu drugiego $v^{(2)} = (x, y, z)^T$. Mamy

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -x-z \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ r \\ -t \end{pmatrix} \Leftrightarrow t = 0, \quad -x-z = r,$$

czyli $v^{(2)} = (x, y, -x-r)^T$ jest wektorem głównym rzędu 2 odpowiadającym wektorowi własnemu $v^{(1)} = (0, r, 0)^T$, $r \neq 0$. Przyjmując odpowiednio $t = 0, r = 1, x = y = 0$ oraz $t = 1, r = 0$ otrzymujemy

$$v_1^{(1)} = (0,1,0)^T, v_1^{(2)} = (0,0,-1)^T, v_2^{(1)} = (1,0,-1)^T.$$

Poszukiwaną bazą Jordana są więc wielomiany (uwaga: baza Jordana nie jest wyznaczana jednoznacznie – jej postać zależy od wybory wektorów własnych oraz głównych)

$$\begin{aligned}
v_1^{(1)} &= (0,1,0)^T \rightsquigarrow w_1(x) = 0 \cdot v_1(x) + 1 \cdot v_2(x) + 0 \cdot v_3(x) = x \\
v_1^{(2)} &= (0,0,-1)^T \rightsquigarrow w_2(x) = 0 \cdot v_1(x) + 0 \cdot v_2(x) - 1 \cdot v_3(x) = -x^2 \\
v_2^{(1)} &= (1,0,-1)^T \rightsquigarrow w_3(x) = 1 \cdot v_1(x) + 0 \cdot v_2(x) - 1 \cdot v_3(x) = -x^2 + 1.
\end{aligned}$$

Sprawdźmy,

$$\begin{aligned}
f(w_1(x)) &= 2x = 2w_2(x) \\
f(w_2(x)) &= -2x^2 + x = w_1(x) + 2w_2(x) \\
f(w_3(x)) &= 2 - 2x^2 = 2w_3(x),
\end{aligned}$$

macierz endomorfzmu f w uzyskanej bazie ma postać

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

jest to macierz Jordana.

Zadanie 4. Wyznacz rzut ortogonalny wektora $u = (3, -1, 1)^T$ na podprzestrzeń liniową

$$V = \{(x, y, z) : x + y - z = 0, \quad x - y = 0\};$$

w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ przyjmij iloczyn skalarny s,

$$s(x, y) = x^T \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y.$$

Przykładowe rozwiązanie Łatwo zauważyć, że

$$V = \{(x, y, z) : x + y - z = 0, x - y = 0\} = \{(x, x, 2x) : x \in \mathbb{R}\}.$$

Jako bazę przestrzeni V przyjmujemy $v = (1, 1, 2)$. Obliczmy długość v:

$$\|v\|^2 = s(v, v) = (1, 1, 2) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 9$$

czyli wektor $w = \frac{1}{3}(1, 1, 2)$ stanowi bazę ortonormalną przestrzeni V. Na podstawie twierdzenia o rzucie ortogonalnym mamy

$$u^* = s(u, w) \cdot w = \frac{1}{3} s((3, -1, 1), (1, 1, 2)) \cdot w = \frac{1}{9} s((3, -1, 1), (1, 1, 2)) \cdot (1, 1, 2)^T = (1, 1, 2)^T,$$

gdyż

$$\frac{1}{9} s((3, -1, 1), (1, 1, 2)) = \frac{1}{9}(3, -1, 1) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}(3, -1, 1) \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 1.$$

Zadanie 1. Wyznacz tę wartość parametru $a \in \mathbb{C}$, dla której liczba $z_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ jest jednym z rozwiązań równania

$$z^6 = a;$$

następnie wyznacz pozostałe jego rozwiązania.

Przykładowe rozwiązanie Po zapisaniu liczby z_0 w postaci trygonometrycznej otrzymujemy

$$z_0 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}.$$

Stąd

$$z_0^6 = \left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)^6 = \cos\frac{9\pi}{2} + i\sin\frac{9\pi}{2} = i,$$

co oznacza, że $a = i$. Mamy zatem równanie $z^6 = i$, którego rozwiązaniami są

$$\begin{aligned}
z_0 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\\
z_1 &= z_0\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\\
z_2 &= z_1\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} - i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\\
z_3 &= z_2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\\
z_4 &= z_3\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} - i\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\\
z_5 &= z_4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} + i\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.
\end{aligned}$$

Zadanie 2. Układ równań

$$\begin{cases} x - y - 3z &= 2\\ 2x - 5y + 6z &= -5\\ 4x - 5y - 8z &= 5 \end{cases}$$

zapisz w postaci mecierzowej; następnie, stosując metodę eliminacji Gaussa, sprowadź macierz uzupełnioną tego układu do postaci schodkowej i wyciągnij wnioski na temat liczby jego rozwiązań. Wykorzystując postać schodkową macierzy uzupełnionej wyznacz te rozwiązania (o ile układ nie jest sprzeczny).

Przykładowe rozwiązanie Rozważany układ możemy zapisać w postaci

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3\\ 2 & -5 & 6\\ 4 & -5 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\\ -5\\ 5 \end{pmatrix}.$$

Stąd

$$\operatorname{rank} U = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 2 \\ 2 & -5 & 6 & -5 \\ 4 & -5 & -8 & 5 \end{pmatrix} = \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -12 & 9 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} =$$
$$= \operatorname{rank}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 2 \\ 0 & 3 & -12 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Mamy $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} U = 2 < 3$, zatem układ posiada nieskończenie wiele rozwiązań (zależnych od jednego parametru). Wykorzystując postać macierzy uzupełnionej otrzymujemy układ równoważny wyjściowemu

$$\begin{cases} x - y - 3z &= 2 \\ 3y - 12z &= 9 \end{cases},$$

stąd

$$\begin{cases} y = 3 + 4z \\ x = 5 + 7z \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}.$$

Zadanie 3. Uzasadnij, że każda macierz rzeczywista wymiaru 2×2 o ujemnym wyznaczniku jest diagonalizowalna. Podaj przykład pokazujący, że taka zależność nie jest prawdziwa dla macierzy zespolonych wymiaru 2×2.

Przykładowe rozwiązanie Ponieważ $\det A = \lambda_1 \lambda_2 < 0$, zatem macierz A musi posiadać dwie rzeczywiste (!) wartości własne różnych znaków, a więc różne. Różnym wartościom własnym odpowiadają liniowo niezależne wektory własne, zatem macierz A jest diagonalizowalna.

Macierz

$$J = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

pokazuje, że podobna zależność nie jest prawdziwa dla macierzy zespolonych: macierz J nie jest diagonalizowalna (jest ona niediagonalną macierzą Jordana), a jej wyznacznik $\det J = -1$ jest ujemny.

Zadanie 4. Dla macierzy symetrycznej

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

wyznacz taką macierz $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, dla której macierz $P^T A P$ jest macierzą diagonalną. Sprawdź poprawność wyniku obliczając iloczyn $P^T A P$.

Przykładowe rozwiązanie Macierz A jest macierzą formy kwadratowej

$$\varphi(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2yz = (x + y)^2 - y^2 + 2yz = (x + y)^2 - (y - z)^2 + z^2.$$

Zgodnie z treścią zadania (wskazówką) przyjmujemy

$$u = x + y, \quad v = y - z, \quad w = z$$

co równoważnie możemy zapisać jako

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix},$$

gdzie

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

jest poszukiwaną macierzą. Faktycznie,

$$P^T A P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 1. (5p+5p) Liczby z_1, z_2, z_3 to pierwiastki wielomianu $f(s) = -s^3 + 3s^2 + 1$.

a) Znajdź wartość wyrażenia $w = (1 + iz_1)(1 + iz_2)(1 + iz_3)$.

b) Uzasadnij, że każda macierz $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, której wielomianem charakterystycznym jest wielomian f, jest nieosobliwą macierzą diagonalizowalną.

Przykładowe rozwiązanie a) Ponieważ $f(s) = -s^3 + 3s^2 + 1 = -(s - z_1)(s - z_2)(z - z_3)$ zatem

$$\begin{aligned} w &= (1 + iz_1)(1 + iz_2)(1 + iz_3) = (-i)^3 (i - z_1)(i - z_2)(i - z_3) = \\ &= i^3 f(i) = -i\left(-i^3 + 3i^2 + 1\right) = -i(i - 2) = 1 + 2i. \end{aligned}$$

Przykładowe rozwiązanie b) Ponieważ $\det A = f(0) = 1 \neq 0$ zatem macierz A jest nieosobliwa. Dodatkowo, ponieważ

$$f'(s) = -3s^2 + 6s = -3s(s - 2) = 0 \Leftrightarrow s = 0 \text{ lub } s = 2$$

oraz $f(0) = 1 \neq 0$, $f(2) = 5 \neq 0$ zatem wielomian f posiada jedynie pojedyncze pierwiastki. To oznacza, że macierz A posiada trzy różne wartości własne; jest więc macierzą diagonalizowalną.

Zadanie 2. (5p+5p) Rozważmy endomorfizm $F : \pi_2 \ni ax^2 + bx + c \to (c - b)x^2 + 2bx - 2a - b + 3c \in \pi_2$ oraz dwie bazy przestrzeni π_2:

$$\begin{array}{lll} u: & u_1(x) = 1 + x^2, & u_2(x) = 1 + x, & u_3(x) = x, \\ w: & w_1(x) = 1, & w_2(x) = 1 - x, & w_3(x) = 1 - x + x^2. \end{array}$$

a) Wyznacz macierze endomorfizmu F w tych bazach.

b) Wskaż, które z wektorów tworzących bazy u, w są wektorami własnymi endomorfizmu F; wypisz odpowiadające im wartości własne. Czy endomorfizm F jest diagonalizowalny? Odpowiedzi uzasadnij.

Przykładowe rozwiązenie a) Ponieważ

$$\begin{aligned} F(u_1(x)) &= x^2 + 1 = u_1(x) \\ F(u_2(x)) &= 2x + 2 = 2u_2(x) \\ F(u_3(x)) &= -x^2 + 2x - 1 = -u_1(x) + 2u_3(x) \end{aligned}$$

zatem macierz A_u endomorfizmu F w bazie u to

$$A_u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Podobnie,

$$\begin{aligned} F(w_1(x)) &= x^2 + 3 = w_3(x) - w_2(x) + 3w_1(x) \\ F(w_2(x)) &= 2x^2 - 2x + 4 = 2w_3(x) + 2w_1(x) \\ F(w_3(x)) &= 2x^2 - 2x + 2 = 2w_3(x) \end{aligned}$$

zatem macierz A_w endomorfizmu F w bazie w to

$$A_w = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Przykładowe rozwiązanie b) Z poprzedniego punktu wynika, że wektorami własnymi endomorfizmu F są u_1, u_2, w_3; odpowiadające im wartości własne to odpowiednio $\lambda_1 = 1$ oraz $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Ponieważ wektory u_1, u_2, w_3 są liniowo niezależne, zatem endomorfizm F jest diagonalizowalny; jego macierz w bazie u_1, u_2, w_3 to

$$J_F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 3. (10p) Rozważmy następujący problem interpolacyjny: szukamy wielomianu $p \in \pi_3$ spełniającego warunki $p(-2) = 3$, $p(-1) = 2$, $p(1) = 6$. Zapisz te warunki w postaci układu równań liniowych ze względu na nieznane współczynniki wielomianu p. Stosując metodę sprowadzania macierzy uzupełnionej układu do postaci schodkowej, zbadaj ile rozwiązań ma ten układ; jeżeli nie jest układem sprzecznym wyznacz jego rozwiązania.

Przykładowe rozwiązanie Niech $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Wówczas warunki z zadania prowadzą do układu równań liniowych

$$\begin{pmatrix} -8 & 4 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Stąd

$$rz \left(\begin{array}{cccc|c} -8 & 4 & -2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{array} \right) = rz \left(\begin{array}{cccc|c} -8 & 4 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -6 & 7 & 13 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 8 \end{array} \right) = rz \left(\begin{array}{cccc|c} -8 & 4 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & -6 & 7 & 13 \\ 0 & 0 & 6 & -3 & 3 \end{array} \right).$$

Oznacza to, że $rzA = rzU = 3$, czyli układ posiada nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od jednego parametru. Z postaci schodkowej macierzy U odczytujemy układ równań (równoważny wyjściowemu)

$$\begin{cases} -8a + 4b - 2c + d = 3 \\ \quad 4b - 6c + 7d = 13 \\ \qquad 6c - 3d = 3 \end{cases}$$

którego rozwiązania to

$$a = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}d, \quad b = 4 - d, \quad c = \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}, \quad d \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 4. (5p+5p) Rozważmy formę kwadratową $\varphi : \mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \to x^2 + 4xy - 4xz + 4y^2 - 8yz + 5z^2 \in \mathbb{R}$.

a) Zbadaj określoność formy kwadratowej φ.

b) Czy zbiór $\{(x, y, z) : \varphi(x, y, z) \leqslant 0\}$ tworzy podprzestrzeń liniową przestrzeni $\mathbb{R}^3$? W przypadku pozytywnej odpowiedzi wyznacz bazę tej podprzestrzeni.

Przykładowe rozwiązanie a) Mamy

$$\varphi(x, y, z) = (x + 2y - 2z)^2 + z^2$$

zatem forma kwadratowa jest dodatnio półokreślona.

Przykładowe rozwiązanie b) Ponieważ warunek

$$\varphi(x, y, z) = (x + 2y - 2z)^2 + z^2 \leqslant 0$$

spełniony jest tylko dla $z = x + 2y = 0$ zatem zbiór

$$\{(x, y, z) : \varphi(x, y, z) \leqslant 0\} = \{(-2t, t, 0) : t \in \mathbb{R}\}$$

to jednowymiarowa podprzestrzeń liniowa przestrzeni $\mathbb{R}^3$, przykładowy wektor bazowy to $u = (-2, 1, 0)^T$.

Zadanie 1. (5p+5p) W zbiorze $G = \mathbb{C}$ wprowadzamy działanie $*$,

$$a * b = a + b + iab.$$

a) Sprawdź, czy struktura algebraiczna $(G, *)$ jest grupą.

b) Rozwiąż równanie $(x * (-x)) * 1 = 3$ ze względu na niewiadomą $x \in G$. Rozwiązania zapisz w postaci trygonometrycznej.

Przykładowe rozwiązanie a) Działanie jest wewnętrzne w zbiorze G. Łatwo również zauważyć, że dla dowolnych $a, b, c \in G$ mamy

$$\begin{aligned}(a * b) * c &= (a + b + iab) * c = a + b + iab + c + i\,(a + b + iab)\,c = \\ &= a + b + c + i(ab + ac + bc) - abc\end{aligned}$$

oraz

$$\begin{aligned}a * (b * c) &= a * (b + c + ibc) = a + b + c + ibc + ia\,(b + c + ibc) = \\ &= a + b + c + i\,(ab + ac + bc) - abc.\end{aligned}$$

To oznacza, że działanie $*$ jest łączne. Jest również przemienne, a zatem element neutralny e, o ile istnieje, możemy wyznaczyć z równania $a * e = a$, z którego łatwo wynika, że $e = 0$. W celu wyznaczenia elementu symetrycznego $\tilde{a}$ dla dowolnego elementu $a \in G$, rozwiązujemy równanie

$$0 = e = \tilde{a} * a = \tilde{a} + a + i\tilde{a}a = \tilde{a}(1 + ia) + a.$$

Łatwo zauważyć, że dla $a = i$ równanie to jest sprzeczne. Struktura $(G, *)$ nie jest grupą.

Przykładowe rozwiązanie b) Zauważmy, że

$$(x * (-x)) * 1 = \left(-ix^2\right) * 1 = -ix^2 + 1 + x^2.$$

Musimy zatem rozwiązać równanie

$$-ix^2 + 1 + x^2 = 3,$$

które równoważnie możemy zapisać jako

$$x^2 = \frac{2}{1 - i} = 1 + i = \sqrt{2}\,(\cos \pi/4 + i \sin \pi/4)\,.$$

Równanie to ma dwa rozwiązania

$$\begin{aligned}x_0 &= \sqrt[4]{2}\,(\cos \pi/8 + i \sin \pi/8) \\ x_1 &= -\sqrt[4]{2}\,(\cos \pi/8 + i \sin \pi/8) = \sqrt[4]{2}\,(\cos(\pi + \pi/8) + i \sin(\pi + \pi/8))\,.\end{aligned}$$

Zadanie 2. (5p+5p) Wielomian $\varphi_A(\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 - 1$ jest wielomianem charakterystycznym pewnej macierzy $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ spełniającej równanie

$$A^2 - 2A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wyznacz macierz A. Upewnij się co do poprawność odpowiedzi wyznaczając wielomian charakterystyczny otrzymanej macierzy oraz sprawdzając, czy spełnia ona powyższe równanie.

Przykładowe rozwiązenie Na podstawie twierdzenie Cayleya-Hamiltona wnioskujemy, że $-A^3 + 2A^2 - I_3 = 0$, co równoważnie możemy zapisać w postaci

$$I_3 = -A\left(A^2 - 2A\right) = -AB.$$

Stąd

$$A = -B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Druga część zadania jest zpełnie oczywista. W celu zminimalizowania liczby działań do wykonania (chociaż zysk w tym przypadku nie będzie powalający) możemy macierz $A^2 - 2A$ wyliczyć jako

$$A^2 - 2A = A\left(A - 2I_3\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zadanie 3. (5p+5p) Uzasadnij, że macierze

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

są podobne oraz wyznacz macierz nieosobliwą $P \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ ustalającą to podobieństwo, tj. taką że $A = PBP^{-1}$.

Przykładowe rozwiązanie Obydwie macierze są trójkątne dolne, więc ich wartości własne stoją na przekątnej. Mamy więc $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Ponieważ

$$\dim\ker\left(A - I_3\right) = 3 - rz\left(A - I_3\right) = 3 - rz\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

oraz

$$\dim\ker\left(B - I_3\right) = 3 - rz\left(B - I_3\right) = 3 - rz\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

zatem macierze te są podobne do tej samej macierzy Jordana $J = B^T$.

Aby otrzymać macierz P, wyznaczymy trzy liniowo niezależne wektory główne macierzy A. Mamy:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

skąd wynika, że $x = y = 0$, $z = t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$. Stąd $v^{(1)} = \left(0, 0, t\right)^T$. Podobnie, z równania

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

otrzymujemy $x = 0$, $y = t$, $z = s \in \mathbb{R}$. Stąd wektor główny rzędu drugiego to $v^{(2)} = \left(0, t, s\right)^T$. Z równania

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x \\ x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ s \end{pmatrix}$$

otrzymujemy $x = t$, $y = s - t$, $z = r \in \mathbb{R}$. Stąd wektor główny rzędu trzeciego to $v^{(3)} = (t, s-t, r)^T$. Przyjmując np. $t = 1$, $s = r = 0$ otrzymujemy wektory tworzące kolejne kolumny macierzy podobieństwa (macierzy przejścia – jak kto woli) Q,

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dla niej

$$A = QJQ^{-1} = QB^TQ^{-1}.$$

Zapisując kolumny macierzy Q w odwrotnej kolejności (zob. wykład – uwaga 9.1) otrzymujemy poszukiwaną macierz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dla której $A = PBP^{-1}$.

Zadanie 4. (5p+5p) Niech $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + (1+a)z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$, gdzie $a \in \mathbb{R}$ to parametr.

a) Zbadaj określoność formy kwadratowej φ w zależności od wartości parametru a.

b) Wyznacz macierz nieosobliwą P, dla której macierz P^TAP jest macierzą diagonalną; sprawdź poprawność rozwiązania wyznaczając macierz P^TAP. Macierz A to macierz symetryczna formy kwadratowej φ.

Przykładowe rozwiązanie a) Zauważmy, że

$$\varphi(x, y, z) = (x + y + z)^2 + az^2.$$

Stąd, dla $a \geqslant 0$ forma kwadratowa φ jest dodatnio półokreślona, dla $a < 0$ jest nieokreślona.

Przykładowe rozwiązanie b) Ponieważ

$$\varphi(x, y, z) = (x + y + z)^2 + az^2 = (x + y + z)^2 + 0y^2 + az^2,$$

zatem przyjmując $X = x + y + z$, $Y = y$, $Z = z$ lub równoważnie $x = X - Y - Z$, $y = Y$, $z = Z$, tj.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

otrzymujemy poszukiwaną macierz P,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sprawdźmy,

$$P^TAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix},$$

zgodnie z oczekiwaniami.