Rozdział 1

Podstawowe struktury algebraiczne

1.1. Działania wewnętrzne

Niech X będzie zbiorem niepustym. Dowolną funkcję $h : X \times X \to X$ nazywamy **działaniem wewnętrznym** w zbiorze X. Działanie wewnętrzne, jak każdą funkcję, możemy określać na wiele sposobów:

- słownie: w grupie studentów jednej z krakowskich uczelni uczęszczających regularnie na wykład z algebery liniowej (zakładamy, że jest to zbiór niepusty) wprowadzamy działanie, które z pary elementów wybiera element starszy (decyduje numer PESEL);
- graficznie: aby zdefiniować funkcję $h : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ wystarczy w układzie $Oxyz$ zaznaczyć stosowne kropki;
- tabelą działań: w zbiorze $X = \{\clubsuit, \spadesuit, \maltese\}$ wprowadzamy działanie h:

h	$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\maltese$
$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\maltese$
$\spadesuit$	$\spadesuit$	$\maltese$	$\clubsuit$
$\maltese$	$\clubsuit$	$\maltese$	$\spadesuit$

,

  na przykład: $h(\spadesuit, \maltese) = \clubsuit$; $h(\maltese, \spadesuit) = \maltese$;
- wzorem: $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ni (x, y) \to \max\{x, y\} \in \mathbb{R}$.

1.1.1. Własności działań wewnętrznych

Niech h będzie działaniem wewnętrznym w zbiorze X.

Definicja 1.1. *Element $e \in X$ spełniający warunek*

$$\forall x \in X \qquad h(e, x) = h(x, e) = x \tag{1.1}$$

nazywamy ***elementem neutralnym działania h.***

Zakładając, że w zbiorze X dla pewnego działania wewnętrznego h istnieją dwa elementy neutralne e_1 i e_2, mamy:

$$e_1 = h(e_1, e_2) = e_2.$$

Stąd wynika następujące

Twierdzenie 1.1. *Jeżeli element neutralny istnieje to jest jedyny.*

Definicja 1.2. *Działanie wewnętrzne $h : X \times X \to X$ nazywamy* **działaniem łącznym**, *jeżeli*

$$\forall x, y, z \in X \qquad h\left(x, h\left(y, z\right)\right) = h\left(h\left(x, y\right), z\right). \tag{1.2}$$

Definicja 1.3. *Działanie wewnętrzne $h : X \times X \to X$ nazywamy* **działaniem przemiennym**, *jeżeli*

$$\forall x, y \in X \qquad h\left(x, y\right) = h\left(y, x\right). \tag{1.3}$$

Niech $h : X \times X \to X$ będzie działaniem wewnętrznym o elemencie neutralnym e.

Definicja 1.4. *Jeżeli dla elementu $x \in X$ istnieje element $\widetilde{x} \in X$ spełniający warunek*

$$h\left(\widetilde{x}, x\right) = h\left(x, \widetilde{x}\right) = e,$$

to element $\widetilde{x}$ nazywamy **elementem symetrycznym dla elementu x względem działania h**.

Załóżmy, że $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2$ są dwoma elementami symetrycznymi dla elementu x względem działania łącznego (!) h o elemencie neutralnym e. Wówczas

$$\widetilde{x}_1 = h\left(e, \widetilde{x}_1\right) = h\left(h\left(\widetilde{x}_2, x\right), \widetilde{x}_1\right) = h\left(\widetilde{x}_2, h\left(x, \widetilde{x}_1\right)\right) = h\left(\widetilde{x}_2, e\right) = \widetilde{x}_2,$$

skąd wynika następujące

Twierdzenie 1.2. *Jeżeli działanie wewnętrzne jest łączne oraz posiada element neutralny, to każdy element posiada co najwyżej jeden element symetryczny.*

Przykład 1.1. *W zbiorze $X = \{a, b, c\}$ wprowadzamy działanie h określone poniższą tabelą:*

h	a	b	c
a	a	b	c
b	b	a	a
c	c	a	a

.

Łatwo stwierdzić, że działanie h posiada element neutralny $e = a$. Ponieważ elementy b oraz c posiadają po dwa elementy odwrotne, którymi są b oraz c:

$$h(b, b) = h(b, c) = h(c, b) = h(c, c) = e = a,$$

zatem, na podstawie twierdzenia 1.2, działanie to nie jest łączne. Faktycznie:

$$c = h(h(b, b), c) \neq h(b, h(b, c)) = b.$$

Przykład 1.2. *Rozważmy ponownie grupę krakowskich studentów uczęszczających na wykład z algebry liniowej. Łatwo sprawdzić, że wprowadzone w tym zbiorze działanie jest łączne i przemienne. Elementem neutralnym względem tego działania jest najmłodszy element, tj. ....; jest on jednocześnie jedynym elementem, który posiada element symetryczny – jest nim on sam.*

1.2. Grupy, pierścienie, ciała

Niech G będzie dowolnym zbiorem niepustym, a $h : G \times G \to G$ działaniem wewnętrznym w G.

Definicja 1.5. *Parę (G, h) nazywamy* **grupą**, *jeżeli:*

- *działanie h jest łączne;*
- *działanie h posiada element neutralny;*

- *każdy element G posiada element symetryczny względem działania h w G.*

Jeżeli działanie h jest przemienne, to grupę (G, h) nazywamy **grupą abelową** *(przemienną).*

Przykład 1.3. *Każda z poniższych struktur jest grupą:*

a) $(\mathbb{Z}, +)$, *tj. zbiór liczb całkowitych z działaniem dodawania liczb; elementem neutralnym jest $e = 0$, elementem symetrycznym dla dowolnej liczby $z \in \mathbb{Z}$ jest liczba $\widetilde{z} = -z$ (nazywana w tym przypadku elementem przeciwnym);*

b) $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, *tj. zbiór liczb rzeczywistych bez zera z działaniem mnożenia liczb; elementem neutralnym jest $e = 1$, elementem symetrycznym dla dowolnej liczby $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ jest liczba $\widetilde{r} = \frac{1}{r}$ (nazywana w tym przypadku elementem odwrotnym);*

c) $(\mathbb{Z}_m, +_{\mathrm{mod}\, m})$, *gdzie, dla ustalonej liczby naturalnej m, $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \ldots, m-1\}$ oraz dla $a, b \in \mathbb{Z}_m$ $(a+b)_{\mathrm{mod}\, m}$ (czyt. $a + b$ modulo m) to reszta z dzielenia $a + b$ przez m, np.*

$$(2+5)_{\mathrm{mod}\, 6} = 7_{\mathrm{mod}\, 6} = 1.$$

Elementem neutralnym względem działania $+_{\mathrm{mod}\, m}$ jest $e = 0$; elementem symetrycznym jest $\widetilde{n} = m - n$ dla $n \in \mathbb{Z}_m \setminus \{0\}$ oraz $\widetilde{0} = 0$;

d) $(\mathcal{B}(X), \circ)$, *tj. zbiór bijekcji określonych na niepustym zbiorze X o wartościach w X, z działaniem składania odwzorowań: $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, dla $x \in X$. Elementem neutralnym jest funkcja identyczność $\mathrm{id}_X : X \ni x \to x \in X$; elementem symetrycznym dla bijekcji f jest funkcja do niej odwrotna f^{-1} (również bijekcja – zob. Wykład z analizy matematycznej).*

Grupy z punktów a), b) i c) są abelowe; grupa z punktu d), w przypadku, gdy zbiór X liczy więcej niż dwa elementy, nie jest abelowa.

Niech teraz h_1 i h_2 będą dwoma działaniami wewnętrznymi w niepustym zbiorze G.

Definicja 1.6. *Strukturę (G, h_1, h_2) nazywamy* **ciałem**, *jeżeli:*

- *(G, h_1) jest grupą abelową, tj.*
  a) działanie h_1 jest łączne;
  b) działanie h_1 posiada w G element neutralny e_1;
  c) każdy element G posiada element symetryczny względem działania h_1;
  d) działanie h_1 jest przemienne;
- *$(G \setminus \{e_1\}, h_2)$ jest grupą abelową, tj.*
  e) działanie h_2 jest łączne;
  f) działanie h_2 posiada w $G \setminus \{e_1\}$ element neutralny;
  g) każdy element $G \setminus \{e_1\}$ posiada element symetryczny względem działania h_2;
  h) działanie h_2 jest przemienne;
- *działanie h_2 jest rozdzielne względem działania h_1, tzn.*

$$\forall x, y, z \in G \qquad h_2(x, h_1(y, z)) = h_1(h_2(x, y), h_2(x, z)). \tag{1.4}$$

Strukturę (G, h_1, h_2), która spełnia wszystkie warunki definicji 1.6, za wyjątkiem warunku g) nazywamy **pierścieniem**.

Zauważmy, że oznaczając działanie h_1 przez „+", a działanie h_2 przez „·", tzn.:

$$h_1(x, y) = x + y, \qquad h_2(x, y) = x \cdot y,$$

warunek (1.4) przyjmuje dobrze znaną postać:

$$\forall x, y, z \in G \qquad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Przykład 1.4. *Niech $\pi(\mathbb{R})$ oznacza zbiór wszystkich wielomianów o współczynnikach rzeczywistych:*

$$\pi(\mathbb{R}) = \left\{x \to a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 : a_i \in \mathbb{R}\ \ (i = 0, \ldots, n)\,, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Łatwo sprawdzić, że struktura $(\pi(\mathbb{R}), +, \cdot)$, gdzie $+$ oraz $\cdot$ to naturalne działania dodawania i mnożenia wielomianów, jest pierścieniem; warunek g) nie jest spełniony, gdyż odwrotność wielomianu na ogół nie jest wielomianem (kiedy jest?).

Przykład 1.5. *Każda z poniższych struktur jest ciałem (ćwiczenie):*

- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, *gdzie $+$ oraz $\cdot$ to naturalne działania dodawania i mnożenia liczb;*
- $(\mathbb{Q}[r], +, \cdot)$, *gdzie $r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ oraz $\mathbb{Q}[r] = \{x + ry : x, y \in \mathbb{Q}\}$, a $+$ oraz $\cdot$ to naturalne działania dodawania i mnożenia liczb;*
- $(\mathcal{L}(\mathbb{R}), +, \circ)$, *gdzie $\mathcal{L}(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \ni x \to ax \in \mathbb{R} : a \in \mathbb{Q}\}$ oraz $+$ i $\circ$ to naturalne działania dodawania oraz składania funkcji.*

Przykład 1.6. *Na zakończenie wykażemy, że zbiór $\mathbb{R}^2$ z działaniami dodawania i mnożenia określonymi poniżej:*

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\,,$$
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

również jest ciałem. Warunki a) oraz d) definicji 1.6 są oczywistymi konsekwen- cjami łączności oraz przemienności dodawania liczb; warunki e), g) oraz rozdzielność $\cdot$ względem $+$ sprawdzamy bezpośrednimi prostymi rachunkami. Wprost z definicji działania $+$ wynika, że $e_+ = (0, 0)$ jest jego elementem neutralnym, natomiast elementem symetrycznym (w przypadku działania oznaczanego $+$ nazywany elementem przeciwnym) dla elementu (x, y) jest $(-x, -y)$. Rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} xe_1 - ye_2 = x \\ xe_2 + ye_1 = y \end{cases}$$

ze względu na niewiadome e_1, e_2, znajdziemy element neutralny $e_\cdot = (e_1, e_2)$ dla działania $\cdot$. Po prostych rachunkach otrzymujemy $e_\cdot = (1, 0)$. Podobnie, rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} x\widetilde{x} - y\widetilde{y} = 1 \\ x\widetilde{y} + y\widetilde{x} = 0 \end{cases}$$

ze względu na niewiadome $\widetilde{x}, \widetilde{y}$ znajdziemy element symetryczny $(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ (w przypadku działania oznaczanego $\cdot$ nazywany elementem odwrotnym) dla dowolnego niezerowego elementu (x, y). Po prostych rachunkach otrzymujemy:

$$(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right).$$