Rozdział 2

Liczby zespolone

Zbiór $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ z działaniami $+$ oraz $\cdot$ określonymi poniżej:

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) := (x_1 + x_2, y_1 + y_2)\,, \tag{2.1}$$
$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) := (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \tag{2.2}$$

jest ciałem (zob. przykład 1.6, str. 7); jest to tzw. **ciało liczb zespolonych**. Przypomnijmy, że elementem neutralnym dla dodawania jest $\mathbf{0} = (0, 0)$, dla mnożenia $\mathbf{1} = (1, 0)$. Elementem przeciwnym dla elementu (x, y) jest $(-x, -y)$, elementem odwrotnym dla dowolnego niezerowego elementu (x, y) jest

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2}\right).$$

Dowolny element $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ możemy interpretować jako punkt (wektor) płaszczyzny $\mathbb{R}^2$. Ponieważ

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) \cdot (1, 0) + (y, 0) \cdot (0, 1) \tag{2.3}$$

zatem, utożsamiając liczbę zespoloną $(x, 0)$ z liczbą rzeczywistą x oraz przyjmując oznaczenie $i = (0, 1)$, uwzględniając równość (2.3), otrzymujemy **postać kanoniczną** (dwumienną) liczby zespolonej

$$z = x + iy;$$

$x = \mathrm{Re}\,(z)$ nazywamy **częścią rzeczywistą**, $y = \mathrm{Im}\,(z)$ **częścią urojoną** liczby zespolonej z. Dwie liczby zespolone są równe, jeżeli mają równe części rzeczywiste oraz części urojone. Liczbę $i = (0, 1)$ nazywamy **jednostką urojoną**. Zauważmy, że

$$i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1.$$

Postać kanoniczna liczby zespolonej umożliwia dodawanie i mnożenie liczb zespolonych tak samo jak wielomianów, tzn. *podobny do podobnego* (w przypadku dodawania):

$$z_1 + z_2 = x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

oraz *każdy przez każdy* (w przypadku mnożenia):

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)\,(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + ix_1 y_2 + iy_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 = \ldots$$

i dalej, uwzględniając warunek $i^2 = -1$,

$$\ldots = x_1x_2 - y_1y_2 + i\,(x_1y_2 + y_1x_2)\,.$$

Porównaj te wyniki ze wzorami (2.1) oraz (2.2).

2.1. Sprzężenie, moduł oraz argument liczby zespolonej

Z każdą liczbą zespoloną $z = x + iy$ możemy stowarzyszyć liczbę zespoloną $\overline{z} = x - iy$ nazywaną **sprzężeniem** liczby z, oraz nieujemną liczbę rzeczywistą $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ nazywaną **modułem** liczby zespolonej.

2.1.1. Własności sprzężenia oraz modułu liczby zespolonej

Niech $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$; wówczas:

- $z + \overline{z} = 2\,\mathrm{Re}\,(z)\,,\ z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}\,(z)\,;$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$; ([1])
- $z \cdot \overline{z} = |z|^2\,;$
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1|\,|z_2|\,,\ \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|};$
- $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|\,.$

Niech $z = x + iy$ będzie dowolną niezerową liczbą zespoloną. Wówczas

$$z = x + iy = |z|\left(\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|}\right) = |z|\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)\,, \tag{2.4}$$

gdzie kąt $\alpha = \arg(z)\,,$ nazywany **argumentem** liczby zespolonej, wyznaczamy rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{x}{|z|} \\ \sin\alpha = \frac{y}{|z|} \end{cases}.$$

Można łatwo wykazać, że w dowolnym przedziale postaci $[r, r + 2\pi)$ lub $(r, r + 2\pi]$ $(r \in \mathbb{R})$ układ ten ma dokładnie jedno rozwiązanie, a dowolne dwa jego rozwiązania różnią się o całkowitą wielokrotność 2π. Ten z argumentów liczby zespolonej, który leży w przedziale $(-\pi, \pi]$ nazywamy **argumentem głównym** i oznaczamy $\mathrm{Arg}\,(z)$.

Przykład 2.1. *Dla liczby* $z = 1 - i$ *mamy:* $\mathrm{Re}\,(1 - i) = 1$, $\mathrm{Im}\,(1 - i) = -1$, $|1 - i| = \sqrt{2}$. *Aby wyznaczyć argument liczby* $1 - i$ *musimy rozwiązać układ równań*

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

Jego rozwiązaniem jest każda z liczb $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, *zatem* $\mathrm{Arg}\,(1 - i) = -\frac{\pi}{4}$. *Ostatecznie*

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

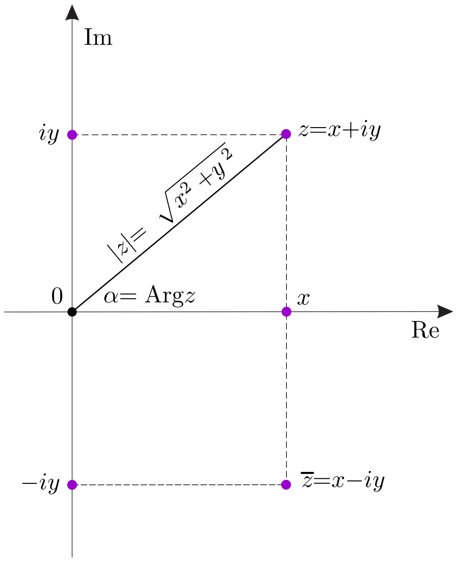
2.2. Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Znając moduł $|z|$ oraz argument α liczby zespolonej z możemy zapisać ją w postaci

$$z = |z|\,(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

nazywanej **postacią trygonometryczną** liczby zespolonej. Dwie niezerowe liczby zespolone są równe jeżeli mają równe moduły i argumenty główne (ich argumenty mogą się natomiast różnić o całkowitą wielokrotność 2π). Liczba 0 jest jedyną liczbą zespoloną jednoznacznie określoną przez jej moduł.

[1] Dzielenie przez liczbę zespoloną z rozumiemy jako mnożenie przez liczbę z^{-1}.



Wykres 1. Interpretacja geometryczna liczby zespolonej, jej modułu, sprzężenia oraz argumentu.

2.2.1. Mnożenie oraz dzielenie liczb zespolonych zapisanych w postaci trygonometrycznej

Niech $z_1 = |z_1|\left(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1\right)$ oraz $z_2 = |z_2|\left(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2\right)$. Wówczas:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1|\left(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1\right)|z_2|\left(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2\right) \\ &= |z_1|\,|z_2|\left(\left(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \sin\alpha_1\sin\alpha_2\right) + i\left(\cos\alpha_1\sin\alpha_2 + \sin\alpha_1\cos\alpha_2\right)\right) \end{aligned}$$

oraz dla $z_2 \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{|z_1|\left(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1\right)}{|z_2|\left(\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2\right)} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\frac{\left(\cos\alpha_1 + i\sin\alpha_1\right)\left(\cos\alpha_2 - i\sin\alpha_2\right)}{\left|\cos\alpha_2 + i\sin\alpha_2\right|^2} \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\left(\cos\alpha_1\cos\alpha_2 + \sin\alpha_1\sin\alpha_2\right) + i\left(\sin\alpha_1\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1\sin\alpha_2\right)\right). \end{aligned}$$

Stąd, po zastosowaniu wzorów

$$\begin{aligned} \cos\left(\alpha_1 \pm \alpha_2\right) &= \cos\alpha_1\cos\alpha_2 \mp \sin\alpha_1\sin\alpha_2 \\ \sin\left(\alpha_1 \pm \alpha_2\right) &= \sin\alpha_1\cos\alpha_2 \pm \sin\alpha_2\cos\alpha_1 \end{aligned}$$

otrzymujemy prosty przepis na iloczyn oraz iloraz liczb zespolonych zapisanych w postaci trygonometrycznej:

a) $z_1 z_2 = |z_1|\,|z_2|\left(\cos\left(\alpha_1 + \alpha_2\right) + i\sin\left(\alpha_1 + \alpha_2\right)\right);$
b) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left(\cos\left(\alpha_1 - \alpha_2\right) + i\sin\left(\alpha_1 - \alpha_2\right)\right)$, gdzie $z_2 \neq 0$.

Ze wzorów tych wynikają następujące własności argumentu iloczynu oraz argumentu ilorazu liczb zespolonych:

- $\arg\left(z_1 z_2\right) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi$, dla $k \in \mathbb{Z}$;
- $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi$, dla $k \in \mathbb{Z}$;

ponadto, ponieważ $\operatorname{Arg}\left(z \cdot \overline{z}\right) = 0$,

- $\arg\overline{z} = -\arg z + 2k\pi$, dla $k \in \mathbb{Z}$.

2.2.2. Wzór de Moivre'a

Ze wzoru na iloczyn liczb zespolonych wyrażonych w postaci trygonometrycznej wynika, że

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^2 = \cos 2\alpha + i\sin 2\alpha.$$

Zależność tę można w prosty sposób uogólnić uzyskując tzw. **wzór de Moivre'a** (prosty dowód indukcyjny pozostawiam jako ćwiczenie):

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha), \qquad \text{dla } n \in \mathbb{Z}.$$

Przykład 2.2. *Aby obliczyć wartość wyrażenia*

$$w = \frac{\left(-1-\sqrt{3}i\right)^9}{(-1+i)^4}$$

wygodnie jest jego licznik i mianownik sprowadzić do postaci trygonometrycznej, a następnie zastosować do nich wzór de Moivre'a.
Niech $z_1 = -1 - i\sqrt{3}$ *oraz* $z_2 = -1 + i$. *Wówczas*

$$\begin{cases} \cos\alpha_1 = -\frac{1}{2} \\ \sin\alpha_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \qquad \textit{oraz} \qquad \begin{cases} \cos\alpha_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

Zatem $\operatorname{Arg}(z_1) = -\frac{2}{3}\pi$ *oraz* $\operatorname{Arg}(z_2) = \frac{3}{4}\pi$. *Mamy więc:*

$$w = \frac{\left(-1-\sqrt{3}i\right)^9}{(-1+i)^4} = \frac{\left(2\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right)\right)^9}{\left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + i\sin\frac{3}{4}\pi\right)\right)^4} = \ldots$$

stosując teraz wzór de Moivre'a, otrzymujemy

$$\ldots = \frac{\left(2^9\left(\cos(-6\pi) + i\sin(-6\pi)\right)\right)}{\left(2^2\left(\cos 3\pi + i\sin 3\pi\right)\right)} = 2^7\left(\cos(-9\pi) + i\sin(-9\pi)\right) = -2^7.$$

2.3. Pierwiastek $n-$tego stopnia z liczby zespolonej

Niech $n \in \mathbb{N}$ będzie ustaloną liczbą naturalną, a $c \in \mathbb{C}$ ustaloną liczbą zespoloną. Rozważmy następujące równanie

$$z^n = c. \tag{2.5}$$

Każdą liczbę zespoloną z dla której równanie (2.5) jest prawdziwe nazywać będziemy jego rozwiązaniem. Celem naszym będzie podanie przepisu pozwalającego znajdywać (wszystkie) rozwiązania równania (2.5).

Zapiszmy szukane rozwiązanie z oraz zadaną liczbę c w postaci trygonometrycznej:

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha), \qquad c = |c|(\cos\gamma + i\sin\gamma),$$

a następnie podstawmy je do równania (2.5). Po zastosowaniu wzoru de Moivre'a otrzymujemy równanie

$$|z|^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha) = |c|(\cos\gamma + i\sin\gamma),$$

z którego natychmiast wynika, że

$$|z|^n = |c| \quad \text{oraz} \qquad n\alpha = \gamma + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

lub równoważnie:

$$|z| = \sqrt[n]{|c|} \quad \text{oraz} \qquad \alpha = \frac{\gamma + 2k\pi}{n},\ k \in \mathbb{Z}.$$

Twierdzenie 2.1. *Jeżeli $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ oraz $n \in \mathbb{N}$ to równanie $z^n = c$ posiada n różnych rozwiązań $z_0, \ldots, z_{n-1}$ postaci*

$$z_k = \sqrt[n]{|c|} \left(\cos \frac{\gamma + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\gamma + 2k\pi}{n} \right), \tag{2.6}$$

dla $k = 0, \ldots, n-1$; $\gamma \in \arg c$.

Uwaga Dla $c \in \mathbb{C}$ zapis $\sqrt[n]{c}$ oznacza zbiór (!) wszystkich liczb zespolonych, których n–ta potęga to c; jest to więc zbiór rozwiązań równania $z^n = c$, tj.

$$\sqrt[n]{c} = \{z_0, \ldots, z_{n-1}\},$$

gdzie liczby z_k określa wzór (2.6). Ten sam zapis stosuje się również do funkcji pierwiastkowej

$$\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_+ \ni x \to \sqrt{x} \in \mathbb{R}_+.$$

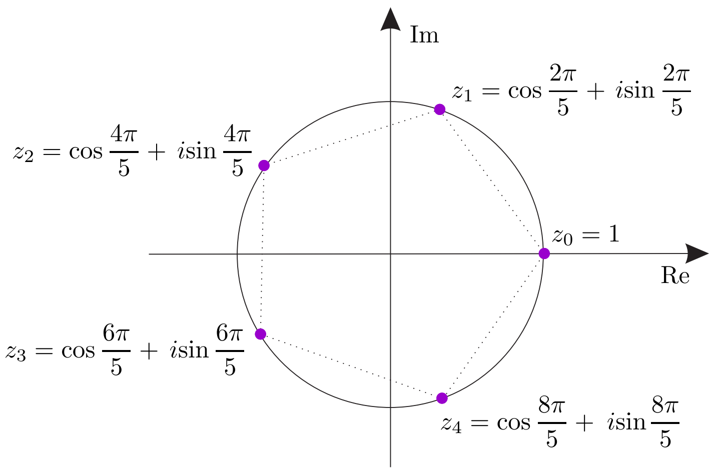
W tych dwóch przypadkach ten sam zapis ma zastosowanie do różnych obiektów: w pierwszym przypadku oznacza zbiór, w drugim liczbę.

2.3.1. Interpretacja geometryczna pierwiastka z liczby zespolonej

Użytecznym przepisem na rozwiązania równania (2.5) jest również, wynikająca ze wzoru (2.6), formuła

$$z_k = z_{k-1} \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n} \right), \quad k = 1, \ldots, n \tag{2.7}$$

w której z_0 jest jednym z rozwiązań równania (2.5). Wynika z niej, że liczba zespolona (wektor płaszczyzny zespolonej) z_1 powstaje w wyniku obrotu z_0 o kąt $\frac{2\pi}{n}$; podobnie z_2 to wynik obrotu z_1 o ten sam kąt. Ogólnie, z_{k+1} powstaje z obrotu z_k o kąt $\frac{2\pi}{n}$. Innymi słowy, liczby $z_0, \ldots, z_{n-1}$ będące rozwiązaniami równania $z^n = c$ stanowią wierzchołki n−kąta foremnego wpisanego w koło o promieniu $r = \sqrt[n]{|c|}$.



Wykres 2. Interpretacja geometryczna rozwiązań równania $z^5 = 1$.

Przykład 2.3. *Rozważmy równanie $z^3 = 1 - i$. Aby znaleźć jego rozwiązania posłużymy się wzorem (2.6). Ponieważ $|c| = |1-i| = \sqrt{2}$ oraz $\gamma = \operatorname{Arg}(1-i) = -\frac{\pi}{4}$ (zob. przykład 2.1), mamy*

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{-\frac{\pi}{4}}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-\frac{\pi}{4}}{3}\right)\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} - i\sin\frac{\pi}{12}\right),\\
z_1 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi}{3} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+2\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\left(-\sin\frac{\pi}{12} + i\cos\frac{\pi}{12}\right),\\
z_2 &= \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{-\frac{\pi}{4}+4\pi}{3} + i\sin\frac{-\frac{\pi}{4}+4\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-1-i}{\sqrt[3]{2}}.
\end{aligned}$$

Przykład 2.4. *Wykorzystując wyliczoną w poprzednim przykładzie wartość pierwiastka z_2 oraz stosując wzór (2.7), obliczymy jawne wartości pozostałych dwóch pierwiastków. Otrzymujemy odpowiednio:*

$$\begin{aligned}
z_0 &= z_2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-1-i}{\sqrt[3]{2}}\left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1+i}{\sqrt[3]{2}}\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) =\\
&= \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}} + i\frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}\\
z_1 &= z_2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{1+i}{\sqrt[3]{2}}\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}} + i\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{2}}.
\end{aligned}$$

Przykład 2.5. *Rozważmy równanie $z^4|z| = -\overline{z}$. Jego rozwiązań poszukamy w postaci trygonometrycznej $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Mamy:*

$$z^4|z| = r^5(\cos 4\alpha + i\sin 4\alpha)$$

oraz

$$-\overline{z} = (\cos\pi + i\sin\pi)\cdot r(\cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha)) = r(\cos(\pi-\alpha) + i\sin(\pi-\alpha)).$$

Porównując moduły oraz argumenty tych liczb otrzymujemy układ równań:

$$\begin{cases} r^5 = r \\ 4\alpha = \pi - \alpha + 2k\pi, \; k\in\mathbb{Z} \end{cases},$$

którego rozwiązaniem jest $r\in\{0,1\}$ oraz $\alpha\in\left\{\pm\frac{\pi}{5}, \pm\frac{3\pi}{5}, \pi\right\}$. Ostatecznie, rozwiązaniem wyjściowego równania są liczby

$$\left\{-1, 0, \cos\frac{\pi}{5} \pm i\sin\frac{\pi}{5}, \cos\frac{3\pi}{5} \pm i\sin\frac{3\pi}{5}\right\}.$$

2.4. Postać wykładnicza liczby zespolonej

Wychodząc od postaci trygonometrycznej liczby zespolonej

$$z = |z|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

oraz uwzględniając wzór (którego uzasadnienie wymaga znajomości szeregów potęgowych)

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \quad (\text{dla } \alpha\in\mathbb{R})$$

otrzymujemy tzw. **postać wykładniczą liczby zespolonej**:

$$z = re^{i\alpha},$$

w której $r \geqslant 0$ to moduł, a $\alpha \in \mathbb{R}$ argument liczby zespolonej z. Dwie liczby zespolone $z_1 = r_1 e^{i\alpha_1}$ oraz $z_2 = r_2 e^{i\alpha_2}$ zapisane w postaci wykładniczej są równe, jeżeli mają te same moduły, a ich argumenty różnią się o całkowitą wielokrotność 2π, tj.

$$r_1 e^{i\alpha_1} = r_2 e^{i\alpha_2} \Leftrightarrow r_1 = r_2 \text{ oraz } \alpha_1 = \alpha_2 + 2k\pi.$$

Ciekawostka Zapisując liczbę -1 w postaci wykładniczej otrzymujemy zwarty wzór łączący pięć najważniejszych stałych matematycznych: 0 (element neutralny dodawania), 1 (element neutralny mnożenia), i, e oraz π

$$e^{i\pi} + 1 = 0.$$

Przez wielu, wzór ten jest uznawany za najpiękniejszy wzór matematyki.

2.5. Logarytm oraz potęgi zespolone*

Jak wynika z powyższych rozważań, dla liczby zespolonej $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$ mamy

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Powyższe rozszerzenie definicji funkcji wykładniczej na zbiór liczb zespolonych umożliwia zdefiniowanie logarytmu dla argumentu zespolonego: dla $z, w \in \mathbb{C}$

$$\log z = w \Leftrightarrow z = e^w.$$

Dla $z \neq 0$ mamy

$$z = |z| e^{i\alpha} = e^{\ln|z|} e^{i\alpha} = e^{\ln|z| + i\alpha}$$

skąd wynika, że

$$\log z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z + i2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Funkcję

$$\operatorname{Log} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z$$

nazywamy **gałęzią główną logarytmu**.

Przykład 2.6. *Mamy*

$$\operatorname{Log}(1) = 0, \quad \operatorname{Log}(e) = 1, \quad \operatorname{Log}(-1) = i\pi, \quad \operatorname{Log}(i) = i\frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{Log}(1+i) = \frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4}.$$

Powyższe rozszerzenie definicji logarytmu na liczby zespolone umożliwia zdefiniowanie potęg zespolonych liczb zespolonych:

$$z^w := e^{w \log z},$$

gdzie $z, w \in \mathbb{C}$ oraz $z \neq 0$.

Przykład 2.7. *Mamy*

$$i^i = e^{i \log i} = e^{i(\operatorname{Log} i + i2k\pi)} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2k\pi}, \quad \textit{dla } k \in \mathbb{Z}$$

oraz

$$(-1)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\log(-1)} = e^{\frac{1}{2}(\operatorname{Log}(-1) + i2k\pi)} = e^{\frac{1}{2}(i\pi + i2k\pi)} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)} =$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = \pm i.$$