

Macierze

Funkcję, która każdej parze liczb naturalnych (i, j) ($i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m$) przyporządkowuje dokładnie jedną liczbę $a_{ij} \in \mathbb{F}$, gdzie $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, nazywamy **macierzą** (rzeczywistą, gdy $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, zespoloną w drugim przypadku). Macierze zapisujemy w postaci prostokątnych tablic:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}; \quad (5.1)$$

będziemy też stosować uproszczoną notację $A = [a_{ij}]_{n \times m}$. Macierz (5.1) to macierz wymiaru $n \times m$ – ma ona n wierszy (poziome) i m kolumn (pionowe). Zbiór macierzy wymiaru $n \times m$ o elementach z ciała \mathbb{F} będziemy oznaczać $\mathbb{F}^{n \times m}$. Jeżeli $m = n$ to macierz nazywamy **macierzą kwadratową stopnia n** . **Macierz zerowa** to macierz złożona z samych zer: $\mathbf{0} = [0]_{n \times m}$. Macierz kwadratowa, której wszystkie elementy – za wyjątkiem być może tych stojących na przekątnej – są równe zero nazywamy **macierzą diagonalną**:

$$\text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn}) = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Macierz diagonalną z jedynekami na przekątnej nazywamy **macierzą jednostkową** (ozn. I lub I_n , aby podkreślić, że jest to macierz wymiaru $n \times n$):

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jeżeli wszystkie elementy macierzy kwadratowej stojące pod (nad) przekątną są równe zero to macierz tę nazywamy macierzą **trójkątną górną (trójkątną dolną)**. Macierze diagonalne są jednocześnie trójkątne górne i trójkątne dolne.

5.1. Działania na macierzach

5.1.1. Dodawanie macierzy oraz mnożenie macierzy przez skalar

W zbiorze macierzy $\mathbb{F}^{n \times m}$ wprowadza się naturalne działania dodawania macierzy oraz mnożenia macierzy przez skalar:

- jeżeli $A = [a_{ij}]_{n \times m}$, $B = [b_{ij}]_{n \times m}$ to $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{n \times m}$;
- dla $\alpha \in \mathbb{F}$: $\alpha A = [\alpha a_{ij}]_{n \times m}$.

Przykład 5.1. Mamy

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

oraz

$$3 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 3 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zbiór macierzy prostokątnych ustalonego wymiaru (możemy dodawać tylko te macierze, które mają ten sam wymiar) z działaniami zdefiniowanymi powyżej jest przestrzenią wektorową nad ciałem liczb rzeczywistych.

5.1.2. Mnożenie macierzy

Niech $A = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{n \times k}$, $B = [b_{ij}] \in \mathbb{F}^{k \times m}$. Możemy wówczas zdefiniować macierz $C = [c_{ij}] \in \mathbb{F}^{n \times m}$:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj}, \quad (i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, m) \quad (5.2)$$

będącą iloczynem macierzy A i B ; ozn. $C = AB$.

Uwaga Aby można było wyznaczyć macierz AB , liczba kolumn macierzy A musi być równa liczbie wierszy macierzy B .

Przykład 5.2. Mamy:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 0 \cdot (-1) & 2 \cdot (-2) + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) & 1 \cdot (-2) + (-2) \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$$

oraz

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 & 1 \cdot 3 + (-2) \cdot (-2) & 1 \cdot 0 + (-2) \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 3 + 0 \cdot (-2) & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ -1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & -1 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) & -1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -2 \\ 4 & 6 & 0 \\ -1 & -5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Własności iloczynu macierzy:

Zakładamy, że wymiary macierzy A, B, C występujących w poniższych warunkach są takie, że wszystkie wyrażenia mają sens.

- (i) Działanie określone wzorem (5.2) jest:
- łączne: $A(BC) = (AB)C$;
 - rozdzielne względem dodawania: $A(B + C) = AB + AC$;
 - posiada element neutralny – jest nim macierz jednostkowa;
- (ii) Na ogół: $AB \neq BA$;
- (iii) $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ lub $B = 0$;
- (iv) $AB = AC, A \neq 0 \not\Rightarrow B = C$.

Ćwiczenie Do punktów (ii)–(iv) podać stosowne przykłady.

5.1.3. Macierz transponowana

Niech $A = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{n \times m}$ będzie dowolną macierzą. Macierz $A^T \in \mathbb{F}^{m \times n}$, gdzie

$$A^T = [a_{ij}]^T \stackrel{\text{df}}{=} [a_{ji}],$$

nazywamy **macierzą transponowaną**. Kolumny (wiersze) macierzy A są więc wierszami (kolumnami) macierzy A^T .

Własności operacji transponowania macierzy:

- $(A + B)^T = A^T + B^T$;
- $(\alpha A)^T = \alpha A^T$, dla $\alpha \in \mathbb{F}$;
- $(AB)^T = B^T A^T$, gdzie $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$.

5.1.4. Macierz sprzężona

Niech $A = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{n \times m}$ będzie dowolną macierzą. Macierz $A^* \in \mathbb{C}^{m \times n}$ określoną wzorem

$$A^* = [a_{ij}]^* \stackrel{\text{df}}{=} [\overline{a_{ji}}],$$

nazywamy **macierzą sprzężoną**.

Własności operacji sprzężenia macierzy:

- $(A + B)^* = A^* + B^*$;
- $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$, dla $\alpha \in \mathbb{C}$;
- $(AB)^* = B^* A^*$, gdzie $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$.

Przykład 5.3. Dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1+i & i \\ -2 & 2 & 0 \\ 3 & 2-i & -1 \end{pmatrix}$$

mamy

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{oraz} \quad B^* = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1-i & 2 & 2+i \\ -i & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

5.2. Wyznacznik macierzy

5.2.1. Definicja aksjomatyczna

Niech $\mathbb{F}^{n \times n}$ oznacza zbiór macierzy kwadratowych stopnia n o elementach z ciała $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Definicja 5.1. Funkcję $\det : \mathbb{F}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{F}$ spełniającą warunki:

(i) dla macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}] = [A_1, \dots, A_n]$, gdzie A_i oznacza i -tą kolumnę A , przekształcenie $A_i \rightarrow \det [A_1, \dots, A_n]$ ($i = 1, \dots, n$) jest liniowe, tzn. dla $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$:

$$\det [A_1, \dots, \alpha A_i + \beta B_i, \dots, A_n] = \alpha \det [A_1, \dots, A_i, \dots, A_n] + \beta \det [A_1, \dots, B_i, \dots, A_n];$$

(ii) \det jest funkcją alternującą, tzn. dla $A_i = A_j$ (dla wszystkich $i \neq j$):

$$\det [A_1, \dots, A_i, \dots, A_j, \dots, A_n] = 0,$$

(iii) $\det(I) = 1$

nazywamy **wyznacznikiem**.

Z powyższej definicji wynika natychmiast następujący wniosek.

Wniosek 5.1. Jeżeli w macierzy kwadratowej zamienimy miejscami dwie kolumny (wiersze), to jej wyznacznik zmieni znak na przeciwny.

Dowód: Rozważmy macierz powstałą z macierzy A przez dodanie do jej i -tej oraz j -tej kolumny odpowiednio kolumny j -tej oraz i -tej:

$$[\dots, A_i + A_j, \dots, A_i + A_j, \dots].$$

Z warunku (ii) powyższej definicji wynika

$$\det [\dots, A_i + A_j, \dots, A_i + A_j, \dots] = 0.$$

Dodatkowo, z warunków (i) oraz (ii):

$$\begin{aligned} 0 &= \det [\dots, A_i + A_j, \dots, A_i + A_j, \dots] \\ &= \det [\dots, A_i, \dots, A_i + A_j, \dots] + \det [\dots, A_j, \dots, A_i + A_j, \dots] \\ &= \det [\dots, A_i, \dots, A_i, \dots] + \det [\dots, A_i, \dots, A_j, \dots] + \\ &\quad + \det [\dots, A_j, \dots, A_i, \dots] + \det [\dots, A_j, \dots, A_j, \dots] \\ &= \det [\dots, A_i, \dots, A_j, \dots] + \det [\dots, A_j, \dots, A_i, \dots], \end{aligned}$$

skąd ostatecznie wynika

$$\det [\dots, A_i, \dots, A_j, \dots] = -\det [\dots, A_j, \dots, A_i, \dots].$$

■

Przykład 5.4. Rozważmy macierz $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ postaci

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Na podstawie definicji 5.1 mamy

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \\ &\quad + 2 \left(2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right) + \\ &\quad - \left(2 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= 2 \left(\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right) + \\ &\quad - 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \\ &\quad + 4 \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right) + \\ &\quad + 2 \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right) + \\ &\quad - 2 \left(\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right) + \\ &\quad - \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right) \\ &= -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2. \end{aligned}$$

Kolumny macierzy $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ są elementami przestrzeni \mathbb{F}^n ; możemy więc wyrazić je jako kombinacje liniowe wektorów bazy kononicznej e_1, \dots, e_n :

$$A_i = \sum_{k=1}^n a_{ki} e_k, \quad \text{dla } i = 1, \dots, n.$$

Stąd

$$\begin{aligned} \det A &= \det \left[\sum_{k_1=1}^n a_{k_1 1} e_{k_1}, \dots, \sum_{k_n=1}^n a_{k_n n} e_{k_n} \right] \stackrel{(i)}{=} \sum_{k_1=1}^n \cdots \sum_{k_n=1}^n a_{k_1 1} \cdots a_{k_n n} \det [e_{k_1}, \dots, e_{k_n}] \\ &\stackrel{(ii)-(iii)}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}, \end{aligned}$$

gdzie S_n to zbiór wszystkich permutacji zbioru $\{1, \dots, n\}$; $\operatorname{sgn}(\sigma)$ to znak permutacji σ ⁽¹⁾.

Twierdzenie 5.2. *Istnieje dokładnie jedna funkcja spełniająca warunki (i)–(iii) definicji 5.1; funkcja ta określona jest wzorem*

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdots a_{\sigma(n)n}. \quad (5.3)$$

Zauważmy, że jeżeli dla pewnego $i \in \{1, \dots, n\} : \sigma(i) < i$, to dla pewnego $j \in \{1, \dots, n\} : \sigma(j) > j$. Stąd oraz ze wzoru (5.3) wynika następujący

Wniosek 5.3. *Wyznacznik macierzy trójkątnej równy jest iloczynowi wyrazów z przekątnej.*

Własności wyznacznika macierzy

Dla dowolnych $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $\alpha \in \mathbb{F}$ zachodzi

- $\det A = \det A^T$;
- $\det(AB) = \det A \cdot \det B$;
- $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$;
- jeżeli do któregoś wiersza (kolumny) dodamy kombinację liniową pozostałych wierszy (kolumn) to wyznacznik się nie zmieni;
- zamiana kolejności dwóch wierszy (kolumn) zmienia znak wyznacznika na przeciwny.

5.2.2. Metoda Laplace’a

Niech $A = [a_{ij}]$ będzie dowolną macierzą kwadratową stopnia n .

Definicja 5.2. **Minorem** elementu a_{ij} macierzy $A = [a_{ij}]$ nazywamy wyznacznik M_{ij} macierzy kwadratowej stopnia $n - 1$ utworzonej z macierzy A przez usunięcie z niej i -tego wiersza oraz j -tej kolumny. Liczbę $(-1)^{i+j} M_{ij}$ nazywamy **dopełnieniem algebraicznym** elementu a_{ij} .

Twierdzenie 5.4 (Laplace). *Dla dowolnej macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]$ stopnia $n \geq 2$:*

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \quad \text{dla każdego } j = 1, \dots, n$$

oraz

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij} \quad \text{dla każdego } i = 1, \dots, n.$$

¹ $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^s$, gdzie s to liczba transpozycji (transpozycja to zamiana kolejności dwóch elementów) tworzących permutację σ .

Przykład 5.5. Dla macierzy $A \in \mathbb{F}^{2 \times 2}$, ze wzoru (5.3) otrzymujemy:

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Przykład 5.6. Dla macierzy $A \in \mathbb{F}^{3 \times 3}$ zastosujemy metodę Laplace'a (do pierwszej kolumny). Mamy

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \\ = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{21}a_{12}a_{33} + a_{21}a_{13}a_{32} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{13}a_{22}.$$

Ten sam wynik uzyskamy stosując tzw. **schemat Sarrusa**:

$$\begin{array}{ccc} & + & + \\ \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} & \begin{array}{ccc} \nearrow & \nearrow & \nearrow \\ \searrow & \searrow & \searrow \\ \searrow & \searrow & \searrow \\ \nearrow & \nearrow & \nearrow \end{array} & = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ & & - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \end{array}$$

Ciekawostka Stosując do macierzy kwadratowej stopnia n metodę Laplace'a obliczenia wyznacznika, musimy obliczyć n wyznaczników macierzy stopnia $n - 1$; każdy z tych wyznaczników wymaga z kolei obliczenia $n - 1$ wyznaczników stopnia $n - 2$, itd. Obliczenie wyznacznika macierzy kwadratowej stopnia n wymaga więc obliczenia $\frac{1}{2}n!$ wyznaczników macierzy kwadratowych stopnia 2; dla macierzy stopnia $n = 20$ daje to ponad 10^{18} wyznaczników 2×2 . Superkomputer wykonujący 10^{15} operacji zmiennopozycyjnych na sekundę potrzebowałby na obliczenie tego wyznacznika 50 minut. Z kolei, sięgając po przedstawioną poniżej metodę przekształceń elementarnych obliczymy ten wyznacznik w czasie 10^{-11} s. **Dla dużych n metoda Laplace'a jest więc wysoce niepraktyczna.**

5.2.3. Metoda przekształceń elementarnych

Metoda przekształceń elementarnych obliczenia wyznacznika polega na przekształceniu danej macierzy do postaci trójkątnej. W przekształceniu tym wykorzystujemy jedynie tzw. **operacje elementarne** na wierszach macierzy:

- dodawanie do wybranego wiersza kombinacji liniowej pozostałych wierszy;
- zamiana kolejności wierszy.

Przykład 5.7. Mamy:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} w_1 \rightarrow w_1 \\ w_2 \rightarrow w_2 - \frac{1}{2}w_1 \\ w_3 \rightarrow w_3 - w_1 \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & -5 & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} w_1 \rightarrow w_1 \\ w_2 \rightarrow w_2 \\ w_3 \rightarrow w_3 + 10w_2 \end{array} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 35 \end{vmatrix} = 35.$$

Metoda przekształceń elementarnych jest jedną z najbardziej efektywnych metod obliczenia wyznaczników macierzy. Jej numerycznie akceptowalna wersja wymaga wykonania tylko $O(n^3)$ operacji arytmetycznych!

5.3. Macierz odwrotna

Definicja 5.3. Macierz $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ taką że $\det A \neq 0$ nazywamy **macierzą nieosobliwą**; w przeciwnym przypadku mówimy, że A jest **macierzą osobliwą**.

Przypomnijmy, że iloczyn macierzy jest działaniem wewnętrznym w zbiorze macierzy kwadratowych stopnia n . Łatwo sprawdzić, że jest to również działanie łączne, którego elementem neutralnym jest macierz jednostkowa I_n stopnia n (dowód przez bezpośredni rachunek). Nasuwa się więc następujące pytanie: *Czy każda macierz kwadratowa posiada element odwrotny (względem mnożenia)?*

Przykład 5.8. Niech

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Wówczas

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + a_{21} & a_{12} + a_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oznacza to, że nie dla każdej macierzy istnieje element odwrotny.

Definicja 5.4. Jeżeli dla macierzy $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ istnieje macierz $X \in \mathbb{F}^{n \times n}$ taka że:

$$AX = XA = I_n,$$

gdzie I_n oznacza macierz jednostkową stopnia n , to macierz tę nazywamy **macierzą odwrotną** do macierzy A i oznaczamy A^{-1} .

Twierdzenie 5.5. Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby macierz $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ posiadała macierz odwrotną jest warunek $\det A \neq 0$.

Własności operacji odwracania macierzy ($A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$):

- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A}$;
- $(A^{-1})^{-1} = A$;
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
- $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$ oraz $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

5.3.1. Algorytmy wyznaczania macierzy odwrotnej

Niech $A = [a_{ij}] \in \mathbb{F}^{n \times n}$.

Metoda macierzy dopełnień algebraicznych

Poniżej przedstawimy algorytm wyznaczania macierzy A^{-1} oparty na macierzy dopełnień algebraicznych.

Krok 1. Obliczamy $\det A$. Jeżeli $\det A = 0$, to macierz A^{-1} nie istnieje; jeżeli $\det A \neq 0$, przechodzimy do kroku drugiego.

Krok 2. Wyznaczamy macierz minorów $A_1 = [M_{ij}]$;

Krok 3. Wyznaczamy macierz dopełnień algebraicznych $A_2 = [(-1)^{i+j} M_{ij}]$;

Krok 4. Wyznaczamy macierz $A_3 = A_2^T$;

Krok 5. Wyznaczamy macierz $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A_3$.

Przykład 5.9. Wyznamy macierz odwrotną do macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $\det A = -5$ zatem macierz odwrotna istnieje. Mamy więc:

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{M_{ij}} \begin{bmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-1)^{i+j}} \begin{bmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -1 & -3 & -1 \\ 0 & 5 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{T} \\ &\xrightarrow{T} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 5 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{\det A}} \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 & 0 \\ 1/5 & 3/5 & -1 \\ 2/5 & 1/5 & -1 \end{bmatrix} = A^{-1} \end{aligned}$$

Metoda Gaussa

Metoda Gaussa wyznaczania macierzy odwrotnej polega na tym, aby z danej macierzy uzyskać macierz jednostkową. Te same operacje, które wykonujemy na macierzy A przeprowadzamy jednocześnie na macierzy jednostkowej. W momencie gdy wyjściowa macierz przyjmuje postać macierzy jednostkowej, macierz jednostkowa staje się macierzą A^{-1} .

Przykład 5.10. Rozważmy ponownie macierz z poprzedniego przykładu. Mamy:

$$\begin{aligned} [A|I] &= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} w_1 \rightarrow w_1 \\ w_2 \rightarrow w_2 - \frac{1}{2}w_1 \\ w_3 \rightarrow w_3 - w_2 \end{array} \\ &\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & -5/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} w_1 \rightarrow w_1 \\ w_2 \rightarrow w_2 \\ w_3 \rightarrow w_3 + \frac{4}{5}w_2 \end{array} \\ &\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & -5/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2/5 & -1/5 & 1 \end{array} \right] \begin{array}{l} w_3 \rightarrow -w_3 \\ w_2 \rightarrow w_2 - \frac{5}{2}w_3 \\ w_1 \rightarrow w_1 + w_3 \end{array} \\ &\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 3/5 & -1/5 & 1 \\ 0 & 5/2 & 0 & 1/2 & 3/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 1/5 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} w_3 \rightarrow w_3 \\ w_2 \rightarrow \frac{2}{5}w_2 \\ w_1 \rightarrow w_1 + \frac{2}{5}w_2 \end{array} \\ &\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 4/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 3/5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 1/5 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} w_1 \rightarrow \frac{1}{2}w_1 \\ w_2 \rightarrow w_2 \\ w_3 \rightarrow w_3 \end{array} \\ &\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/5 & 3/5 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2/5 & 1/5 & -1 \end{array} \right] = [I|A^{-1}]. \end{aligned}$$

5.4. Rząd macierzy

Niech $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$. Można pokazać, że liczba liniowo niezależnych kolumn macierzy jest taka sama jak liczba jej liniowo niezależnych wierszy. Liczbę tę, dla macierzy A , oznaczamy $\text{rank}(A)$ i nazywamy **rzędem** macierzy A .

Własności rzędu macierzy

- dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{F}^{n \times m}$: $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$;
- dodanie do dowolnej kolumny (wiersza) macierzy kombinacji liniowej pozostałych kolumn (wierszy) nie zmienia jej rzędu;
- dowolna zmiana kolejności kolumn (wierszy) macierzy nie zmienia jej rzędu.

Przykład 5.11. Wyznaczymy rząd macierzy

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Stosując metodę sprowadzania macierzy do postaci trójkątnej (zob. rozdział 5.2.3, str. 32) mamy:

$$\begin{array}{l} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} w_1 \rightarrow w_1 \\ w_2 \rightarrow w_2 + \frac{1}{2}w_1 \\ w_3 \rightarrow w_3 \end{array} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{array}{l} w_1 \rightarrow w_1 \\ w_2 \rightarrow w_2 \\ w_3 \rightarrow w_3 - \frac{2}{3}w_2 \end{array} \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{array}$$

Ponieważ tylko dwa pierwsze wiersze ostatniej macierzy są liniowo niezależne, zatem $\text{rank}(A) = 2$.

Twierdzenie 5.6. Rząd macierzy A równy jest największemu stopniowi (wymiarowi) niezerowego minora macierzy A .

Przykład 5.12. Rozważmy ponownie macierz

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Ponieważ $A \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ zatem $\text{rank}(A) \leq 3$. Ponieważ

$$\begin{vmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0,$$

zatem $\text{rank}(A) \leq 2$. Ponieważ

$$\begin{vmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -12 \neq 0,$$

zatem $\text{rank}(A) = 2$.